Ю. М. Колягин,
Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Алгебра
и начала математического анализа

11

Профильный уровень

Издательство
Мнемозина

Ю. М. Колягин,
Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Алгебра и начала математического анализа

УЧЕБНИК
для учащихся
общеобразовательных
учреждений

11

Профильный уровень

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

8-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2010

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6
К62

Колягин Ю. М.

К62 Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. — 8-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 264 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01343-3

Учебник для 11-го класса — составная часть учебно-методического комплекта, включающего учебник для 10-го класса, а также дидактические материалы и методические рекомендации для 10—11-го классов. Наряду с традиционными разделами («Производная» и «Интеграл») в учебнике содержатся главы: «Комплексные числа», «Делимость целых чисел. Целочисленные решения уравнений», «Многочлены и алгебраические уравнения», кратко изложены элементы комбинаторики и теории вероятностей. В книге много задач различного уровня сложности — в том числе из вариантов вступительных экзаменов в вузы.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович, **Сидоров** Юрий Викторович, **Ткачева** Мария Владимировна и др.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
11 класс

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений
(профильный уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *Е. В. Смольникова*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *С. П. Передерий*. Корректоры *Г. В. Кострикова*, *О. Ю. Денисова*
Компьютерная верстка: *Н. Ф. Бердавцева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006513.04.10 от 21.04.2010.

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,5. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 30486.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ», ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-346-01343-3

§ 1. Предел функции. Непрерывные функции

1. Предел функции

Задача 1. Построить график функции:

1) $y = x + 1$;

2) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{при } x \neq 1, \\ 3 & \text{при } x = 1; \end{cases}$ 3) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Δ 1) Графиком функции $y = x + 1$ является прямая, проходящая через точки (0; 1) и (−1; 0) (рис. 1).

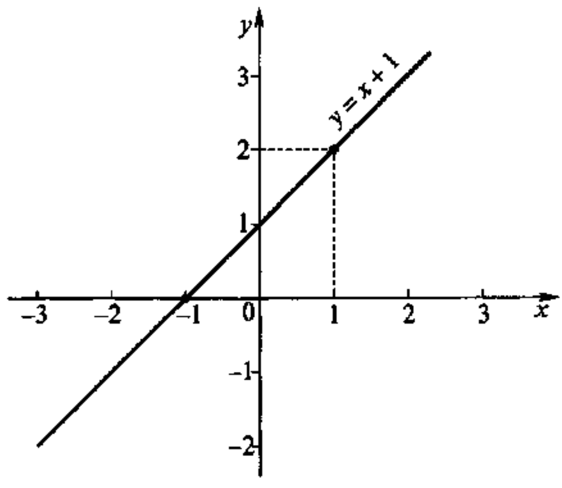

Рис. 1

2) Если $x \neq 1$, то $y = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ — это та же самая прямая, проходящая через точки (0; 1); (−1; 0) с «выколотой» точкой (1; 2); при $x = 1$ значение функции равно 3 (рис. 2).

3) Если $x \neq 1$, то $y = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, а при $x = 1$ функция не определена. Графиком этой функции является та же самая прямая, про-

ходящая через точки (0; 1), (−1; 0), но с «выколотой» точкой (1; 2) (рис. 3). ▲

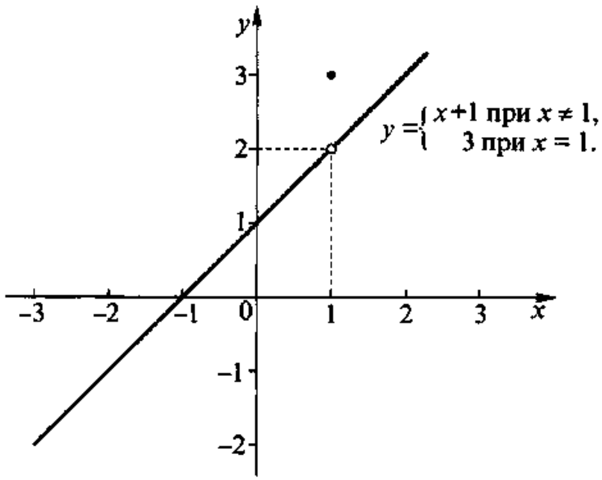

Рис. 2

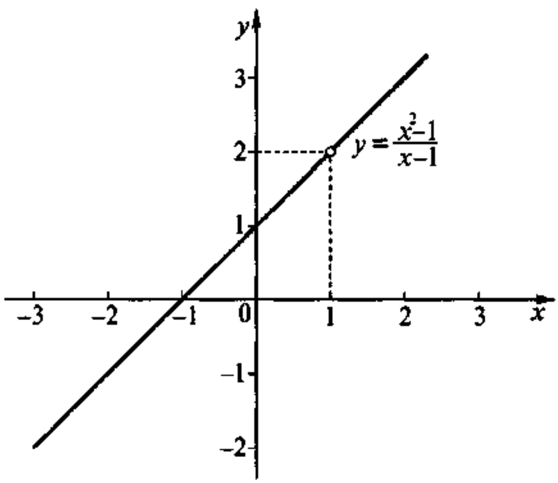

Рис. 3

Значения всех трех рассмотренных функций при $x \neq 1$ совпадают со значениями функции $y = x + 1$. Однако они отличаются своим поведением в точке $x = 1$: первые две функции определены в точке $x = 1$, но для первой функции $y(1) = 2$, а для второй $y(1) = 3$; третья функция при $x = 1$ не определена.

Все эти функции обладают одним общим свойством: при значениях x, близких к 1, значения каждой из этих функций мало отличаются от 2. В этом случае говорят, что каждая из этих функций имеет в точке $x = 1$ *предел*, равный 2, и пишут:

$$\lim_{x\to1} y(x) = 2.$$

Действительно, рассмотрим поведение этих функций при значениях x, близких к $x = 1$, т. е. при $x = 1 + h$, где h — положительные или отрицательные числа, модули которых близки к нулю (рис. 4).

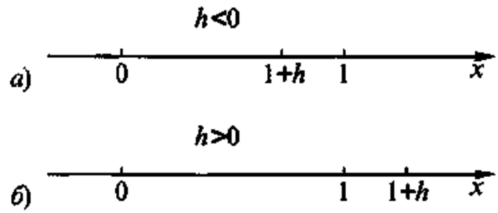

Рис. 4

Из рисунков 1—3 видно, что для каждой из данных функций $y(x + h) \approx 2$ и при $h\to0$ погрешность приближения также стремится к нулю. В этом случае и говорят, что *функция* $y(x)$ *имеет предел при* $x\to1$, равный 2.

Однако предел первой функции при $x\to1$ совпадает со значением функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x\to1} y(x) = y(1) = 2.$

Для второй функции предел при $x\to1$ отличается от ее значения в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x\to1} y(x) \neq y(1)$, так как $\lim\limits_{x\to1} y(x) = 2$, а $y(1) = 3$.

Для третьей функции также $\lim\limits_{x\to1} y(x) = 2$, но в самой точке $x = 1$ функция не определена, т. е. $y\,(1)$ не существует.

Первую функцию называют *непрерывной в точке* $x = 1$ (т. е. в этой точке график функции не разрывается), а вторую и третью функции — *разрывными в точке* $x = 1$ (т. е. в этой точке графики функций терпят разрыв).

Задача 2. Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ x+1 & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

и выяснить, имеет ли эта функция предел при $x\to1$.

Δ График этой функции состоит из части параболы $y = x^2$ при $x \leqslant 1$ и части прямой $y = x + 1$ при $x > 1$ (рис. 5).

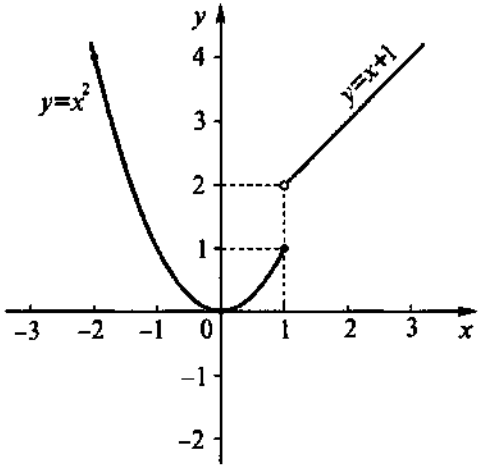

Рис. 5

Из рисунка 5 видно, что если значения x близки к 1, но меньше 1, т. е. $x = 1 + h$, где $h < 0$, то $y(x + h) \approx 1$.

Если же значения x близки к 1, но больше 1, т.е. $x = 1 + h$, где $h > 0$, то $y(x + h) \approx 2$.

В целом же при приближении x к 1 слева и справа получаются различные пределы, равные 1 и 2; так как эти пределы не одинаковы, то функция не имеет предела при $x \to 1$. ▲

В этом случае также говорят, что функция имеет *левый* (*левосторонний*) предел, равный 1, при $x \to 1$ слева и имеет *правый* (*правосторонний*) предел, равный 2, при $x \to 1$ справа. При этом пишут:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} y(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} y(x) = 2.$$

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. Тем не менее приведем строгое определение предела функции в точке.

Определение[1]. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (в точке x_0)*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 6).

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

[1] Греч. буквы ε — эпсилон, δ — дельта.

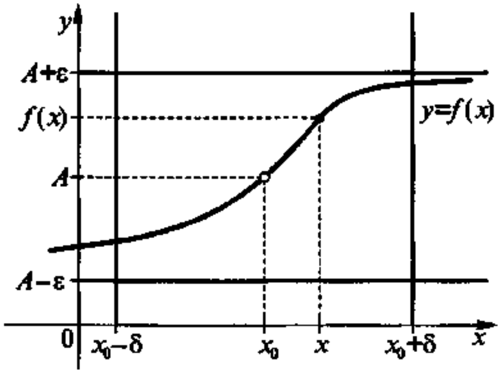

Рис. 6

Задача 3. Показать, что функция $f(x) = (x-2)^2 + 3$ имеет предел, равный 3, в точке $x = 2$.

Δ Используем данное определение предела функции. Зададим какое-нибудь число $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 0{,}01$, и найдем такое число $\delta > 0$, чтобы при $|x-2| < \delta$ выполнялось неравенство

$$|f(x) - 3| < 0{,}01.$$

Решим последнее неравенство. Так как $f(x) = (x-2)^2 + 3$, то

$$|(x-2)^2| < 0{,}01,$$

откуда

$$|x-2| < 0{,}1,$$

т. е. можно взять $\delta = 0{,}1$. Тогда из неравенства $|x-2| < 0{,}1$ следует неравенство $|f(x) - 3| < 0{,}01$.

Аналогично, если задано любое число $\varepsilon > 0$, то, выбрав для данной функции $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, можно показать, что при $|x-2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$. ▲

2. Непрерывные функции

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т.е. линию, которую можно провести не отрывая карандаша от бумаги, то эту функцию называют *непрерывной* на этом промежутке.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 7, непрерывна на отрезке $[a; b]$.

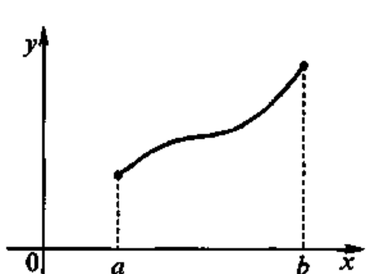

Рис. 7

Функция, график которой представлен на рисунке 1, непрерывна на всей числовой прямой.

Функция, график которой изображен на рисунке 5, непрерывна на промежутках $x \leqslant 1$ и $x > 1$, но не является непрерывной на всей числовой прямой (в точке $x = 1$ она терпит разрыв).

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функцию называют *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$.

В курсе высшей математики доказывается, что все основные элементарные функции (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая) непрерывны в каждой точке из области их определения.

Задача 4. Выяснить, является ли непрерывной функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{при } x \neq -2, \\ 5 & \text{при } x = -2 \end{cases}$$

в точке $x = -2$.

Δ Если $x \neq -2$, то $f(x) = x - 2$, поэтому $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$. Но по условию $f(-2) = 5$, следовательно данная функция не является непрерывной в точке $x = -2$. ▲

Задача 5. Выяснить, является ли непрерывной функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

Δ Так как функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, т. е. $f(0)$ не существует, то в данной точке эта функция не является непрерывной. ▲

Упражнения

1. Принадлежит ли графику функции $y = f(x)$ точка A, если:

1) $y = 2^{\frac{x^2-4}{x+2}}$, $A(2; 1)$;
3) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$, $A\left(\frac{3\pi}{4}; 0\right)$;

2) $y = 3^{\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}}$, $A(-\sqrt{2}; 1)$;
4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$, $A\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 8). Найти область определения и множество значений функции.

3. Найти область определения и множество значений функции:

1) $y = x^2 - 3x - 4$;
2) $y = 3 - 2x - x^2$;
3) $y = \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \frac{2+x}{x+1}$.

4. Построить график функции:

1) $y = \begin{cases} x-2 & \text{при } x \neq 3, \\ 4 & \text{при } x = 3; \end{cases}$
2) $y = \begin{cases} 1-x^2 & \text{при } x \neq 2, \\ 3 & \text{при } x = 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2-2x & \text{при } x \leqslant 3, \\ x-3 & \text{при } x > 3; \end{cases}$
4) $y = \begin{cases} 2-\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x < 2, \\ x^2-4 & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$

5. Пользуясь рисунком 8, выяснить:

1) какие из функций являются непрерывными;
2) какие точки являются точками разрыва;
3) какие из функций являются непрерывными на интервале $(-2; 1)$.

---

6. Построить график функции $f(x)$ и выяснить: а) имеет ли эта функция предел при $x \to 2$; б) является ли эта функция непрерывной на всей числовой прямой; в) на каких промежутках функция непрерывна:

1) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 2, \\ 4+\sqrt{x-2} & \text{при } x > 2; \end{cases}$
3) $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{при } x < 2, \\ |x-4| & \text{при } x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & \text{при } x \leqslant 2, \\ x^2-4x+3 & \text{при } x > 2; \end{cases}$
4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{при } x \geqslant 2, \\ x-1 & \text{при } x < 2. \end{cases}$

7. Выяснить, является ли непрерывной функция:

1) $y = \frac{1+x}{x+3}$ в точке $x = -3$;

2) $y = \begin{cases} \frac{x^2+4x+4}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ 3 & \text{при } x = -2 \end{cases}$ в точке $x = -2$.

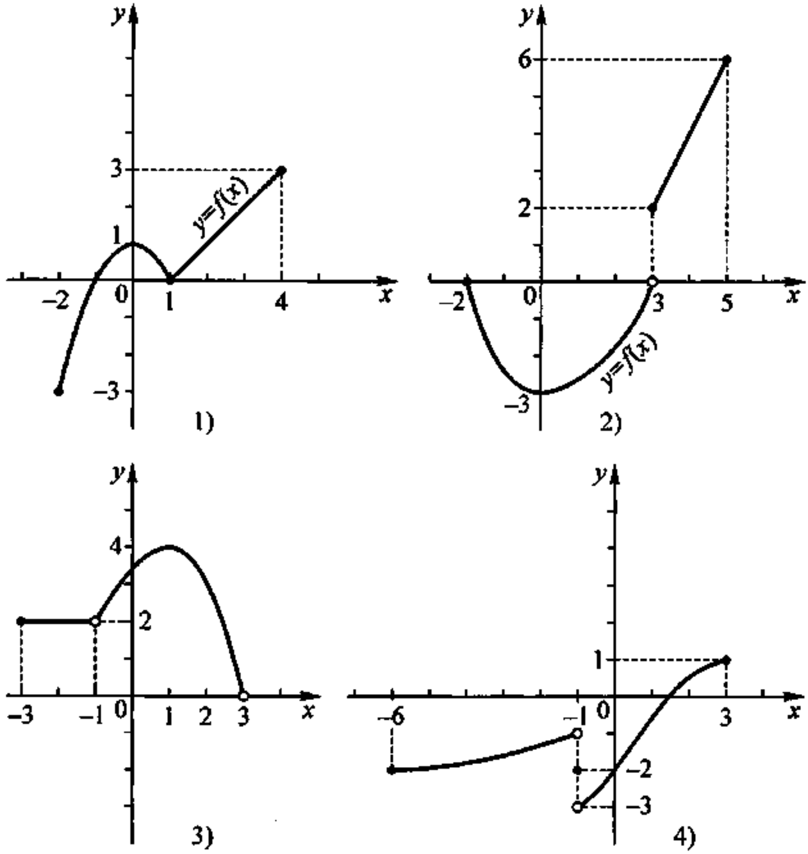

Рис. 8

8*. Показать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, равный A, если:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 4$, $A = 16$;
2) $f(x) = (x-5)^2$, $x_0 = 3$, $A = 4$;
3) $f(x) = (x+1)^2 - 2$, $x_0 = 1$, $A = 2$;
4) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $x_0 = 4$, $A = 2$.

9*. Найти такое число b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, если:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ x+b & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ bx^2 & \text{при} \quad x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{при } x<2, \\ x+b & \text{при } x\geqslant 2, \end{cases}$ $x_0=2$;

4) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при } x<\pi, \\ b+|x-\pi| & \text{при } x\geqslant\pi, \end{cases}$ $x_0=\pi$.

§ 2. Производная

Рассмотрим движение точки вдоль прямой. Пусть за время t от начала движения точка прошла путь длиной $s(t)$. Зависимость s от t, задаваемую функцией $s(t)$, называют законом движения точки.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t и рассмотрим промежуток времени от t до $t+h$, где h — малое число. За время от t до $t+h$ точка прошла путь длиной

$$s(t+h)-s(t).$$

Средняя скорость движения точки за этот промежуток времени равна отношению:

$$v_{\text{ср}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Из курса физики известно, что при уменьшении h это отношение приближается к некоторому числу, которое называется мгновенной скоростью и обозначается $v(t)$. Число $v(t)$ называют пределом данного отношения при h, стремящемся к нулю, и записывают так:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Это равенство означает, что отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ можно рассматривать как приближенное значение мгновенной скорости $v(t)$, причем с уменьшением h и стремлением его к нулю погрешность приближения становится сколь угодно малой, т.е. также стремится к нулю.

Например, если точка за время t проходит путь $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, то для вычисления мгновенной скорости нужно составить разность $s(t+h)-s(t)=\frac{g(t+h)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gth+\frac{gh^2}{2}$, затем взять отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=gt+\frac{gh}{2}$ и устремить h к нулю. Если $h\to 0$, то $\frac{gh}{2}$ также стремится к нулю и $gt+\frac{gh}{2}\to gt$. Поэтому $v(t)=gt$.

Мгновенную скорость $v(t)$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «эс штрих от тэ»), т.е. $v(t)=s'(t)$.

Перейдем теперь к общему определению производной. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале. Зафиксируем какую-нибудь точку x_0 из этого интервала и возьмем число h, не равное нулю, так, чтобы точка x_0+h также лежала на этом интервале. Рассмотрим разность значений функции в точках x_0+h и x_0, т.е. $f(x_0+h)-f(x_0)$.

Составим дробь $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Числитель этой дроби — разность значений функции f в точках x_0+h и x_0, а знаменатель — разность аргументов x_0+h и x_0. Эту дробь будем называть *разностным отношением*. Если при $h\to 0$ существует предел разностного отношения, равный некоторому числу, то это число называют *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают $f'(x_0)$ (читается: «эф штрих от икс нуль»).

Таким образом, *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел разностного отношения* $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $h\to 0$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x данного интервала. Тогда

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad (1)$$

а $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием*. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой* в этой точке.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция имеет производную на этом промежутке или дифференцируема на этом промежутке.

Задача 1. Найти производную функцию $f(x)=x^2$.

Δ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$. Отсюда по формуле (1) получаем $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ▲

Задача 2. Продифференцировать функцию $f(x) = x^3$.

Δ Найдем сначала разность $f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3$.

По формуле разности кубов

$(x+h)^3 - x^3 = [(x+h) - x][(x+h)^2 + (x+h)x + x^2] = h(3x^2 + 3xh + h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$. Отсюда $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2$.

Следовательно, $(x^3)' = 3x^2$. ▲

Задача 3. Найти производную постоянной, т.е. функции, принимающей при всех x одно и то же значение $f(x) = c$.

$$\Delta \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0.$$

Следовательно, $f'(x) = 0$. ▲

Таким образом, производная постоянной равна нулю:

$$(c)' = 0.$$

Задача 4. Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

Δ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$$

Следовательно, $(kx+b)' = k$. ▲

Итак,

$$(kx+b)' = k.$$

Например, $(2x-5)' = 2$, $(-3x+4)' = -3$, $(7x)' = 7$, $(x)' = 1$.

Упражнения

10. Составить разностное отношение, если:

1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = x - 1$;

3) $f(x) = 4x^2$; 4) $f(x) = x^2+2$;

5) $f(x) = x^3 - x^2$; 6) $f(x) = 2x^3 + x$.

11. Используя определение производной, найти $f'(x)$:

1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;

3) $f(x) = -3x^2 + 2$; 4) $f(x) = 3x^2 - 5x$.

12. С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:

1) $f(x) = 2x$; 2) $f(x) = 4x$;

3) $f(x) = -5x - 7$; 4) $f(x) = -7x + 5$.

13. Тело движется по закону $s(t) = 1 + 5t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:

1) от $t = 2$ до $t = 5$; 2) от $t = 0{,}9$ до $t = 1$.

14. Найти мгновенную скорость движения точки, если:

1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 3t + 2$.

15. Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}3t - 1$. Найти:

1) среднюю скорость движения от $t = 2$ до $t = 8$;

2) скорость движения в момент $t = 2$ и $t = 8$.

---

16. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения $s(t)$ задан формулой:

1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

17*. Дана функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$.

1) Используя определение производной, найти $f'(x)$.

2) Найти значение $f'(x)$ в точке $x = 0{,}1$.

§ 3. Правила дифференцирования

При вычислении производных применяются следующие два *правила дифференцирования.*

1. *Производная суммы равна сумме производных*:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \qquad (1)$$

Это правило означает, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, то их сумма также дифференцируема и справедлива формула (1).

○ Пусть $F(x) = f(x) + g(x)$. Тогда: $F(x + h) - F(x) = f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

При $h \to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$, вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x) = f'(x) + g'(x)$, т.е. справедливо равенство (1). ●

Например, $(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$.

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной*:

$$(cf(x))' = cf'(x). \tag{2}$$

○ Пусть $F(x) = cf(x)$. Тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

и поэтому $F'(x) = cf'(x)$. ●

Например, $(4x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$.

Задача 1. Найти производную функции $f(x) = 3x^2 + 5x$.

Δ Так как $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, то по формулам (1) и (2) получаем $(3x^2 + 5x)' = (3x^2)' + (5x)' = 3(x^2)' + 5(x)' = 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 6x + 5$. ▲

Формула (1) справедлива не только для суммы двух функций, но и для суммы трех, четырех и т. д. функций.

Задача 2. Найти производную функции $2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$.

Δ $(2x^3 + 5x^2 - 3x + 4)' = (2x^3)' + (5x^2)' + (-3x)' + (4)' = 2(x^3)' + 5(x^2)' - 3(x)' = 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 3 \cdot 1 = 6x^2 + 10x - 3$. ▲

Приведем без доказательства формулы производной произведения, частного и производной сложной функции.

3. *Производная произведения*:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{3}$$

Задача 3. Проверить справедливость формулы (3), если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

Δ В левой части формулы (3) получаем $(f(x) \cdot g(x))' = ((3x^2 - 5) \times (2x + 7))' = (6x^3 + 21x^2 - 10x - 35)' = 18x^2 + 42x - 10$.

В правой части формулы (3) получаем $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (3x^2 - 5)' \cdot (2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot (2x + 7)' = 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5)2 = 18x^2 + 42x - 10$. ▲

Задача 4. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = (x-1)^3 (x+2)^2$ равно нулю.

Δ По формуле (3) получаем $f'(x) = 3(x-1)^2 (x+2)^2 + 2(x-1)^3 \times (x+2) = (x-1)^2 (x+2)(3x + 6 + 2x - 2) = (x-1)^2 (x+2)(5x+4)$.

Решая уравнение $(x-1)^2 (x+2)(5x+4) = 0$, находим $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -0{,}8$. ▲

4. *Производная частного:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0. \qquad (4)$$

З а д а ч а 5. Найти производную функции $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Δ Обозначим $x^3 = f(x)$, $x^2 + 1 = g(x)$. По формуле (4) находим

$$F'(x) = \frac{(x^3)'(x^2+1) - (x^3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}. \ ▲$$

З а д а ч а 6. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$: 1) положительно; 2) отрицательно.

Δ По формуле (4) получаем $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

1) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} > 0$, находим $f'(x) > 0$ при $x < 0$.

2) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} < 0$, находим $f'(x) < 0$ при $x > 0$. ▲

Введем определение *сложной функции*. Пусть задана функция $f(y)$, где y в свою очередь является функцией от x, т.е. $y = g(x)$. Тогда функцию $f(g(x))$ называют сложной функцией (или *суперпозицией*) функций $y = g(x)$ и $f(y)$.

Примеры сложных функций:

1) если $f(y) = e^y$, $y = g(x) = x^2$, то $f(g(x)) = e^{x^2}$;

2) если $f(y) = \ln y$, $y = g(x) = \cos x$, то $f(g(x)) = \ln \cos x$.

З а д а ч а 7. Представить формулой сложную функцию $f(g(x))$, если $f(y) = \dfrac{y}{y+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Δ Заменяя y в формуле $f(y) = \dfrac{y}{y+1}$ на $\dfrac{1}{x-1}$, получаем

$$f(g(x)) = \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+1} = \frac{1}{x}. \ ▲$$

5. *Производная сложной функции:*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x). \qquad (5)$$

Задача 8. Найти производную функции $(5x+3)^3$.

Δ Здесь $y = g(x) = 5x+3$, $f(y) = y^3$. Так как $f'(y) = (y^3)' = 3y^2$, то $f'(g(x)) = 3(5x+3)^2$. Но $g'(x) = (5x+3)' = 5$. По формуле (5) получаем

$((5x+3)^3)' = 3(5x+3)^2 \cdot 5 = 15(5x+3)^2$. ▲

Упражнения

18. Найти производную функции:

1) x^2+x; 2) x^2-x; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2+26$; 8) $8x^2-16$.

19. Продифференцировать функцию:

1) $3x^2-5x+6$; 5) x^3+5x;
2) $5x^2+6x-7$; 6) $-2x^3+18x$;
3) $x+2x^2$; 7) $2x^3-3x^2+6x+1$;
4) $x-3x^2$; 8) $-3x^3+2x^2-x-5$.

20. Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:

1) $f(x) = x^2-2x+1$; 3) $f(x) = -x^3+x^2$;
2) $f(x) = x^3-2x$; 4) $f(x) = x^2+x+1$.

21. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^3-2x$; 5) $f(x) = (x+2x)(x-5)$;
2) $f(x) = -x^2+3x+1$; 6) $f(x) = (x-3)(x+4)$;
3) $f(x) = 2x^3+3x^2-12x-3$; 7) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$;
4) $f(x) = x^3+2x^2-7x+1$; 8) $f(x) = (x+1)^3$.

22. Найти производную функции:

1) $(x-2)^2x^3$; 3) $(x+2)x^3$;
2) $(x^2-x)(x^3+x)$; 4) $(x-1)3x^2$.

23. Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = (2x-3)^2(x-1)$; 2) $f(x) = (x+1)^3(x+2)$.

24. Найти производную функции:

1) $\dfrac{x^3+x^2+x}{x+1}$; 2) $\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x-1}$.

25. Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{2x-3}{5-4x}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 4) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-7x}$.

26. Записать формулой функцию $f(g(x))$, если:

1) $f(y) = y^2$, $y = g(x) = x + 1$;

2) $f(y) = \lg y$; $y = g(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(y) = \dfrac{y+1}{y-2}$, $y = g(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

4) $f(y) = \dfrac{3y+2}{y-1}$, $y = g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

27. Найти область определения и множество значений функций:

1) $y = \cos\sqrt{x}$;

2) $y = \sqrt{\log_2 x}$;

3) $y = \dfrac{1}{\log_2 x}$;

4) $y = \cos^2 x$.

28. Используя формулу (5), найти производную функции:

1) $(2x-1)^3$; 2) $(x+3)^2$; 3) $(3x^2 - 2x)^2$; 4) $(x^3 - x^2)^3$.

---

29. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;

2) $f(x) = -x^2 + 4x$;

3) $f(x) = 2x^3 - x^2$;

4) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$;

5) $f(x) = (1 - x)^3$;

6) $f(x) = (x+3)^2 (x-1)$.

30. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x) = (x+2)^2 x^3$; 2) $f(x) = (x-3)\, 3x^2$.

31. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $\dfrac{3x^2-1}{1-2x}$; 2) $\dfrac{3x^3}{1-3x}$.

32. Записать формулой функцию $f(g(x))$, если:

1) $f(y) = \sqrt{y^2-1}$, $y = g(x) = \sqrt{x^2+1}$;

2) $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $y = g(x) = \cos x$.

33. Найти производную функции:

1) $f(x) = (3x^3 - 4x^2 + 2x - 1)^2$;

2) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x + 2)^3$.

34. Найти все значения a, при которых $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

35. Найти все значения a, при которых $f'(x) < 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$.

§ 4. Производная степенной функции

Рассмотрим степенную функцию $y = x^p$. При $p = 1, 2, 3$ эта функция дифференцируема и ее производная равна соответственно

$$(x)' = 1,\ (x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2.$$

Приведем без доказательства формулу для производной степенной функции при любом действительном показателе p:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \tag{1}$$

Эта формула справедлива во всех внутренних точках области определения функции x^p.

Задача 1. Доказать справедливость формулы (1) при $p = -1$, т.е. доказать, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Δ Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x}.$$

Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

При $h \to 0$ знаменатель дроби стремится к x^2, следовательно,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ \text{т.е.}\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Полученное равенство можно записать так:

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-2}.$$

Это и означает, что формула (1) верна при $p = -1$. ▲

Задача 2. Доказать формулу (1) при $p = \frac{1}{2}$.

Δ Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$. Получим

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{(x+h)-x}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{h}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Если $h\to 0$, то $\sqrt{x+h}$ стремится к $\sqrt{x}$, поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2}{2\sqrt{x}},$$

т. е.

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Полученное равенство можно записать так:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1},$$

т. е. формула (1) справедлива при $p=\frac{1}{2}$. ▲

Задача 3. Найти $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Δ Так как $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, то по формуле (1) получаем

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Следовательно, $f'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. ▲

Задача 4. Доказать, что

$$((kx+b)^p)'=pk\,(kx+b)^{p-1}. \qquad (2)$$

Δ Функцию $(kx+b)^p$ можно рассматривать как сложную функцию $f(g(x))$, где $y=g(x)=kx+b$, $f(y)=y^p$. Так как $f'(y)=py^{p-1}$, то $(f(g(x)))'=p\,(kx+b)^{p-1}$. Но $g'(x)=(kx+b)'=k$. Следовательно,

$$((kx+b)^p)'=p\,(kx+b)^{p-1}k=pk\,(kx+b)^{p-1}. \text{ ▲}$$

Задача 5. Найти производную функции:

1) $(-3x+4)^7$; 2) $(5x-2)^{-3}$; 3) $\sqrt[3]{5-7x}$.

Δ По формуле (2) находим:

1) $((-3x+4)^7)' = -21(-3x+4)^6$;

2) $((5x-2)^{-3})' = -15(5x-2)^{-4}$;

3) $(\sqrt[3]{5-7x})' = \left((5-7x)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{7}{3}(5-7x)^{-\frac{2}{3}}$. ▲

Упражнения

Найти производную функции (36—37).

36. 1) x^6; 2) x^{10}; 3) $3x^4+2x^{15}$; 4) $7x^3-3x^7$;

5) $\frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{3}{x^4}$; 7) $x^2+\frac{1}{x^3}$; 8) $x^3+\frac{1}{x^2}$.

37. 1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[5]{x}$; 3) $2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[14]{x}$;

5) $\frac{1}{3\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; 7) $x^{\sqrt{2}}$; 8) x^{π}.

38. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; 3) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$;

2) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1$; 4) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

39. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$; 5) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$;

2) $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$; 6) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

3) $f(x)=(x^2+1)(x^2-9)$; 7) $f(x)=(x-2)^2x\sqrt[3]{x}$;

4) $f(x)=(x^2+3)(2x^2+5)$; 8) $f(x)=(x-1)^2x\sqrt{x}$.

40. Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x)=(x-1)^3(2-x)^7$; 3) $f(x)=\sqrt{2-x}\cdot(3-2x)^8$;

2) $f(x)=(2x-1)^5(1+x)^4$; 4) $f(x)=(5x-4)^6\cdot\sqrt{3x-2}$.

41. При каких значениях x значение производной функции $y=(x-3)^5(2+5x)^6$ равно 0?

42. Найти производную функции (42–46):

1) $\frac{x^5+x^3+x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}$.

---

43. 1) $\frac{1}{2x^3}$; 2) $\frac{3}{7x^6}$; 3) $-\frac{2}{x^4}$; 4) $4x^{-\frac{3}{2}}$; 5) $x^{-\frac{3}{4}}+6x^{\frac{4}{3}}$;

6) $2\sqrt[7]{x^2}-3\sqrt[5]{x^{-2}}$; 7) $6\sqrt[6]{x^5}-\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$; 8) $2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x\sqrt[4]{x^3}}$.

44. 1) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 2) $(x-1)\sqrt{x}$; 3) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{x^3+2}{\sqrt[3]{x}}$;

5) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$;

7) $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$; 8) $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2$.

45. 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; 3) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$;

2) $(x-1)^4(x+1)^7$; 4) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$.

46. 1) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; 3) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x}$;

2) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$; 4) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

47. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 1:

1) $f(x)=x^4+8x^3+x-3$; 4) $f(x)=\frac{x^3+x^2+16}{x}$;

2) $f(x)=2x^5+5x^2+x+4$; 5) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}+x^2+3}{\sqrt{x}}$;

3) $f(x)=\frac{x^4+x^3+81}{x^2}$; 6) $f(x)=\frac{x\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}$.

48. Решить неравенство $f'(x)>0$, если:

1) $f(x)=x^4-4x^2+1$; 4) $f(x)=\frac{x^3+16}{x}$;

2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$; 5) $f(x)=(x+2)^2\sqrt{x}$;

3) $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$; 6) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

49. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t)=0,1t^2-0,5t+0,2$. Найти угловую скорость (рад/с) вращения тела в момент времени $t=20$ с.

50*. Тело, масса которого $m=5$ кг, движется прямолинейно по закону $s=1-t+t^2$ (где s выражается в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

51*. В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m=2l^2+3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность в точке: 1) отстоящей от начала стержня на 3 см; 2) в конце стержня.

52*. Найти производную функции $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ при $x<2$ и при $x>3$.

§ 5. Производные некоторых элементарных функций

В курсе высшей математики доказывается, что показательная, логарифмическая и тригонометрические функции дифференцируемы в каждой точке, где они определены. Приведем таблицу этих производных:

$$(e^x)'=e^x, \tag{1}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad x>0, \tag{2}$$

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{3}$$

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{4}$$

Формулы (1), (3) и (4) справедливы при всех x.

З а д а ч а 1. Найти производную функции $f(x)=x+2\sin x+3e^x$.

Δ $f'(x)=(x)'+2(\sin x)'+3(e^x)'=1+2\cos x+3e^x$. ▲

Отметим, что из формулы дифференцирования сложной функции следует формула

$$[f(kx+b)]'=kf'(kx+b). \tag{5}$$

В этой формуле запись $f'(kx+b)$ означает, что в производной для функции $f(x)$ аргумент x заменяется выражением $kx+b$, т.е. если $f'(x)=g(x)$, то $f'(kx+b)=g(kx+b)$.

Например, так как $(\cos x)'=-\sin x$, то $[\cos(x+1)]'=-\sin(x+1)$, $(\cos 2x)'=-2\sin 2x$; так как $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $(\sqrt{x-3})'=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$,

$$(\sqrt{3x})'=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}},\quad (\sqrt{-2x+1})'=(-2)\frac{1}{2\sqrt{-2x+1}}=-\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}.$$

Задача 2. Найти производную функции $\sin(3x+2)$.

Δ Обозначим $f(x) = \sin x$. Требуется найти производную функции $f(3x+2)$. Так как $f'(x) = \cos x$, то по формуле (5) получаем $[\sin(3x+2)]' = 3\cos(3x+2)$. $\blacktriangle$

Задача 3. Найти производную функции e^{2x-1}.

Δ Обозначим $f(x) = e^x$. Так как $f'(x) = e^x$, то по формуле (5) получаем $(e^{2x-1})' = 2e^{2x-1}$. $\blacktriangle$

Задача 4. Найти производную функции $\ln\left(\frac{1}{2}x-3\right)$.

Δ Положим $f(x) = \ln x$. Так как $f'(x) = \frac{1}{x}$, то по формуле (5) получаем $\left[\ln\left(\frac{1}{2}x-3\right)\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}x-3} = \frac{1}{x-6}$. $\blacktriangle$

Задача 5. Найти производную функции $(5x+7)^{17}$.

Δ Обозначим $f(x) = x^{17}$. Тогда $f'(x) = 17x^{16}$. Поэтому по формуле (5) получаем $[(5x+7)^{17}]' = 5\cdot 17(5x+7)^{16} = 85(5x+7)^{16}$. $\blacktriangle$

Задача 6. Найти производную функции $\sqrt[3]{x-1}$.

Δ Так как производная функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равна $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, то производная функции $f(x-1)$ по формуле (5) равна

$$(\sqrt[3]{x-1})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}. \ \blacktriangle$$

С помощью формулы (5) можно найти производную показательной функции a^x.

Задача 7. Найти производную функции a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Δ Возведем основное логарифмическое тождество $e^{\ln a} = a$ в степень x. Получим $e^{x\ln a} = a^x$. Поэтому, дифференцируя по формуле (5), имеем

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a\cdot e^{x\ln a} = \ln a\cdot a^x. \ \blacktriangle$$

Например, $(2^x)' = 2^x\ln 2$; $(10^x)' = 10^x\ln 10$.

Задача 8. Найти производную функции $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Δ Так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$. $\blacktriangle$

Задача 9. Доказать формулу

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0. \qquad (6)$$

Δ Формула (6) верна при $x > 0$. Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$, откуда, применяя формулу (2) и правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, формула (6) верна для любого $x \neq 0$. ▲

Задача 10. Найти производную функции $\sin^2 x$.

Δ Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Упражнения

Найти производную функции (53—66):

53. 1) $e^x + \cos x$; 2) $\ln x + \sin x$; 3) $\cos x - \ln x$;
4) $e^x - \sin x$; 5) $\sin x - \sqrt[3]{x}$; 6) $\sqrt{x} - \cos x$;
7) $\frac{1}{x} + \ln x$; 8) $\frac{1}{x^2} + e^x$.

54. 1) $3\sin x$; 2) $2\cos x$; 3) $-5e^x$;
4) $-4\ln x$; 5) $\frac{1}{2}\ln x$; 6) $\frac{3}{10}e^x$;
7) $-2\cos x$; 8) $-3\sin x$.

55. 1) $3x^5 - 8\ln x$; 2) $6x^4 - 9e^x$; 3) $2x^7 + 4\cos x$;
4) $\frac{1}{4}x^8 + 3\sin x$; 5) $6\sqrt{x} - 5\sin x$; 6) $3\sqrt[3]{x} - 4\cos x$;
7) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 8) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

56. 1) $6\sqrt[3]{x} + 5\ln x$; 2) $8\sqrt[4]{x} + 16e^x$; 3) $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5}\cos x$;
4) $\frac{9}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{4}\sin x$; 5) $4x\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^x$; 6) $3x\sqrt[3]{x} - 3\ln x$;
7) $\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} - 4\sin x$; 8) $\frac{1}{x\sqrt{x}} + 5\cos x$.

57. 1) $3x^2 - 4\sqrt[3]{x} + e^x$; 5) $x^9 + 3x^{\frac{1}{9}} + 5\ln x$;
2) $2x^3 + 3\sqrt{x} - \cos x$; 6) $2x^8 - 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\sin x$;
3) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin x$; 7) $8x^{-\frac{3}{4}} + 7x^{\frac{1}{7}} - 3\cos x$;
4) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \ln x$; 8) $3x^{-\frac{5}{6}} - 5x^{-\frac{4}{5}} - \frac{1}{4}e^x$.

58. 1) $\frac{1}{5}x^2+2\ln x-\cos x$; 5) $x^2(x-1)+3\sin x+4\cos x$;

2) $\frac{1}{4}x^2-e^x+2\sin x$; 6) $x(x+2)^2+2\ln x-3\cos x$;

3) $5\sqrt[5]{x}+e^x-6\sin x$; 7) $(x-1)(x+2)+e^x-\ln x$;

4) $6\sqrt[6]{x}-\ln x+\frac{1}{3}\cos x$; 8) $(x+3)(2x-1)+e^x-\sin x$.

59. 1) $(x+3)^8$; 2) $(x-4)^7$; 3) $\sqrt[3]{x-2}$; 4) $\sqrt{x+5}$;

5) $\frac{1}{(x+1)^2}$; 6) $\frac{1}{(x-1)^3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{x+8}}$; 8) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.

60. 1) $(3x+1)^5$; 2) $(5x-4)^6$; 3) $(2-4x)^4$; 4) $(1-3x)^7$;

5) $\frac{2}{(5x-3)^3}$; 6) $\frac{4}{(3x-1)^2}$; 7) $\frac{1}{(2-3x)^4}$; 8) $\frac{1}{(4-3x)^5}$.

61. 1) $\sqrt[5]{3-5x}$; 2) $\sqrt[4]{2-8x}$; 3) $\sqrt[3]{4x+1}$; 4) $\sqrt{3x+2}$;

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{2x-4}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt[4]{3-8x}}$; 8) $\frac{5}{\sqrt[3]{2-9x}}$.

62. 1) $\sin 5x$; 2) $\cos 7x$; 3) $\cos(x+4)$; 4) $\sin(x-2)$;

5) e^{2x}; 6) e^{-x}; 7) $\ln 3x$; 8) $\ln(-2x)$.

63. 1) $e^{\frac{x}{4}}$; 2) $e^{-\frac{x}{2}}$; 3) $\ln(x-1)$; 4) $\ln(x+2)$;

5) $\sin(x-3)$; 6) $\cos(x+1)$; 7) $\cos\frac{x}{2}$; 8) $\sin\frac{2x}{3}$.

64. 1) $\sin(2x+5)$; 2) $\cos(3x-4)$; 3) $\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)$; 4) $\sin\left(2-\frac{3x}{4}\right)$;

5) $\sin\frac{x+3}{2}$; 6) $\cos\frac{1-x}{3}$; 7) $\cos\frac{4-5x}{3}$; 8) $\sin\frac{2x+3}{5}$;

9) $\sin^3 x$; 10) $\cos^4 x$.

65. 1) e^{3-8x}; 2) e^{5x-7}; 3) $\ln(4x-3)$; 4) $\ln(3-4x)$;

5) $e^{\frac{3x-4}{2}}$; 6) $e^{\frac{5-2x}{3}}$; 7) $\ln\frac{2}{3-4x}$; 8) $\ln\frac{3}{2x+7}$.

66. 1) 5^x; 2) 4^x; 3) 9^{x+2}; 4) 7^{x-3};

5) $\log_5 x$; 6) $\log_4 x$; 7) $\lg(x-1)$; 8) $\lg(x+3)$.

67. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = x - \cos x$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$;
3) $f(x) = \ln(x+1) - 2x$;
4) $f(x) = 2\ln(x+3) - x$;
5) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$;
6) $f(x) = 3^{2x} - 2x\ln 3$;
7) $f(x) = x + \ln 2x$;
8) $f(x) = x + \ln(2x+1)$.

Найти производную функции (68–71).

68. 1) $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3}} + \ln\frac{2x+3}{5}$;
2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln\frac{2-5x}{3}$;
3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos\frac{1-x}{2}$;
4) $3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin\frac{1+x}{4}$;
5) $5\sin\frac{2x+3}{4} - 4\sqrt{\frac{1}{x-1}}$;
6) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}} - 3\cos\frac{x-2}{3}$;
7) $6\sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}} + 4e^{\frac{3-5x}{2}}$;
8) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}}$.

69. 1) $0{,}5^x \cdot \cos 2x$;
2) $5\sqrt{x} \cdot e^{-x}$;
3) $\ln(1-3x)\ \sin x$;
4) $e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x)$.

70. 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$.

71. 1) $\frac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x-\log_2 x}{x\ln 2}$; 3) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$; 4) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

72. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 12\ln x$;
2) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x$;
3) $f(x) = \sqrt{x+4} - 2\ln(x+7)$;
4) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x+2)$;
5) $f(x) = 2\sqrt{x+2} - \ln(x-4)$;
6) $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x-2)$;
7) $f(x) = 3\ln x + \ln(x+3)$;
8) $f(x) = \ln(x-1) + 2\ln(x+2)$.

73. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = 6x + \cos 3x$;
3) $f(x) = \ln x - x$;
4) $f(x) = x - 2\ln x$;
5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$;
6) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$.

74. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x)=1-5\cos 2x+2(\sin x-\cos x)-2x$.

75*. Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно нулю:

1) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$.

76*. Вычислить $f'(x_0)+f(x_0)+2$, если $f(x)=x\sin 2x$, $x_0=\pi$.

77*. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x)=x-\ln x$; 2) $f(x)=x\ln x$;

3) $f(x)=x^2\ln x$; 4) $f(x)=x^3-3\ln x$.

78*. Найти производную функции $\ln(x^2-5x+6)$ при $x<2$ и при $x>3$.

§ 6. Геометрический смысл производной

1. Угловой коэффициент прямой

Напомним, что графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая (рис. 9). Число $k=\operatorname{tg}\alpha$ называют *угловым коэффициентом прямой*, а угол α — *углом между этой прямой и осью* Ox.

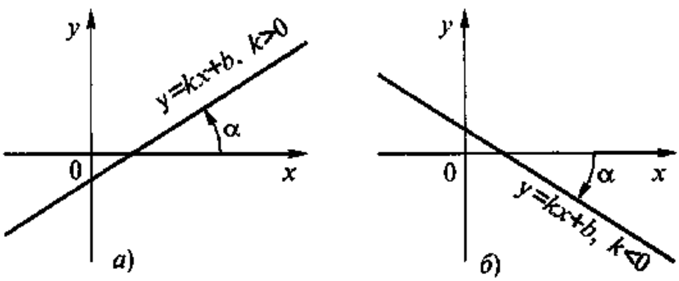

Рис. 9

Если $k>0$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (рис. 9, *а*), в этом случае функция $y=kx+b$ возрастает.

Если $k<0$, то $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ (рис. 9, *б*), в этом случае функция $y=kx+b$ убывает.

Выведем уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку M_0 (x_0; y_0). Пусть прямая не параллельна оси Oy и M (x; y) — произвольная точка этой прямой (рис. 10).

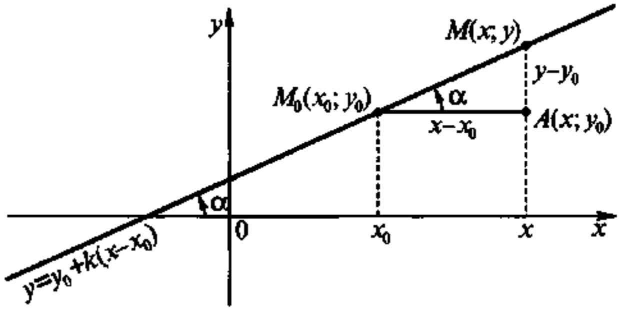

Рис. 10

Из ΔAMM_0 находим $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\alpha$. Обозначая $\operatorname{tg}\alpha = k$, получаем $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, откуда

$$y = y_0 + k\,(x - x_0). \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0; y_0).*

Задача 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (−2; 3) и образующей с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

Δ Находим угловой коэффициент прямой $k=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Так как $x_0 = -2$, $y_0 = 3$, то по формуле (1) получаем

$y = 3 + (-1)(x - (-2))$, т.е. $y = -x + 1$. ▲

2. Геометрический смысл производной

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y = f(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0)$.

Если A и M — точки графика этой функции с абсциссами x_0 и $x_0 + h$ (рис. 11), то угловой коэффициент $k = k\,(h)$ прямой, проходящей через точки A и M (эту прямую называют *секущей*), выражается формулой

$$k(h) = \operatorname{tg}\angle MAC = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad (2)$$

где C — точка с координатами $x_0 + h$ и $f(x_0)$, а уравнение секущей AM можно записать в виде:

$$y - y_0 = k(h)(x - x_0). \qquad (3)$$

Пусть $h \to 0$, тогда точка M, двигаясь по графику, приближается к точке A, а секущая поворачивается вокруг точки A. Если существует $\lim\limits_{h \to 0} k(h) = k_0$, т.е. существует предельное положение секущей (рис. 12), то прямая

$$y - y_0 = k_0(x - x_0), \qquad (4)$$

уравнение которой получается из уравнения (3) заменой $k(h)$ на k_0, называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

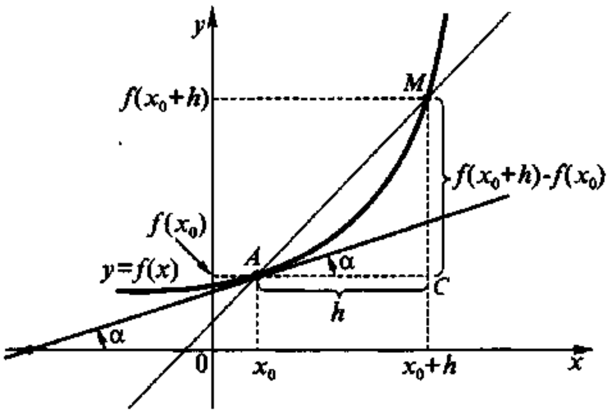

Рис. 11

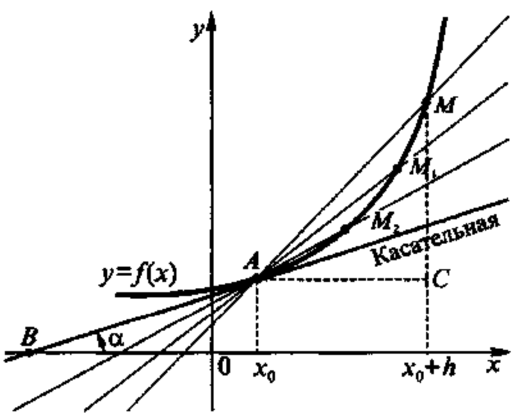

Рис. 12

Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ — предельное положение секущей MA при $h \to 0$.

Если существует $f'(x_0)$, то

$$k_0 = \lim_{h\to 0} k(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Так как k_0 — угловой коэффициент касательной, то

$$k_0 = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси Ox (рис. 11).

Таким образом,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Итак, геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

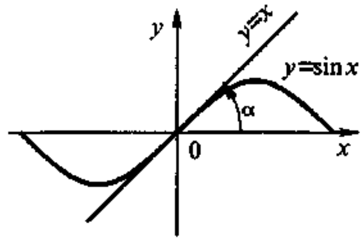

Рис. 13

Задача 2. Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке (0; 0) и осью Ox.

Δ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке (0; 0), т. е. значение производной этой функции при $x = 0$.

Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (5) находим $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = \cos 0 = 1$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (рис. 13). ▲

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке (0; 0) синусоида касается прямой $y = x$ (рис. 13).

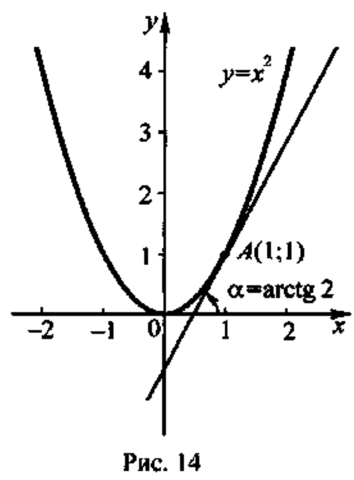

Рис. 14

Задача 3. Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox.

Δ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (5) находим $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 2\cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 14). ▲

3. Уравнение касательной к графику функции

Заменяя в формуле (4) k_0 на $f'(x_0)$, получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6}$$

Задача 4. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Δ Производная функции $f(x) = x^3$ равна $f'(x) = 3x^2$. При $x = 2$ получаем $f(2) = 2^3 = 8$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Поэтому уравнение касательной имеет вид $y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 8 + 12(x - 2)$.

Ответ. $y = 12x - 16$. ▲

Задача 5. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Δ Значения функции $f(x) = \cos x$ и ее производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ равны: $f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Используя формулу (6), найдем искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ или $y = -\frac{1}{2}\,x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ▲

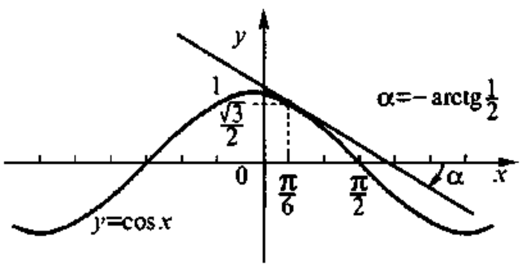

Рис. 15

Касательная к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 15.

Задача 6*. Показать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

Δ Пусть $f(x) = x^2$, тогда $f'(x) = 2x$, $f(x_0) = x_0^2$ и $f'(x_0) = 2x_0$.

По формуле (6) находим уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2.$$

Найдем точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x - x_0^2 = 0$ находим $x = \frac{x_0}{2}$. ▲

Отсюда следует простой геометрический *способ построения касательной к параболе $y = x^2$* в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 16).

Построив касательную к параболе, можно построить ее *фокус* F. Напомним, что фокусом является точка, в которую нужно поместить источник света, чтобы все лучи, отраженные от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. *Для построения фокуса* F надо построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB (рис. 17).

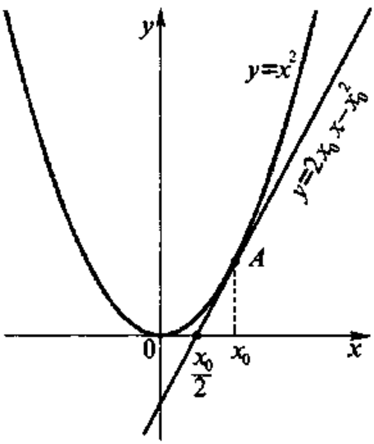

Рис. 16

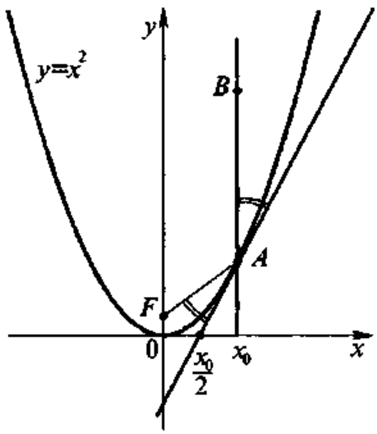

Рис. 17

Упражнения

79. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, если:

1) $k = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$;
2) $k = 3$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$;
3) $k = -\frac{1}{2}$, $x_0 = -2$, $y_0 = -3$;
4) $k = -2$, $x_0 = 3$, $y_0 = -4$;
5) $k = -3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;
6) $k = \frac{1}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
7) $k = \frac{2}{3}$, $x_0 = \frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{1}{3}$;
8) $k = -\frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

80. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и образующей с осью Ox угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $x_0 = 2$, $y_0 = -3$;

2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;

3) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; $x_0 = 1$, $y_0 = 1$;

4) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; $x_0 = -1$, $y_0 = -1$;

5) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $x_0 = -2$, $y_0 = -3$;

6) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $x_0 = 6$, $y_0 = -5$;

7) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $x_0 = -6$, $y_0 = 4$;

8) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $x_0 = 4$, $y_0 = -3$.

81. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$;

5) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$.

82. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;

6) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;

7) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}$, $x_0 = 0$;

8) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 2$.

83. На рисунке 18 представлен график функции $y = f(x)$ и касательные к графику в точках A, B, C, D. Определить знак производной этой функции в точках A, B, C, D.

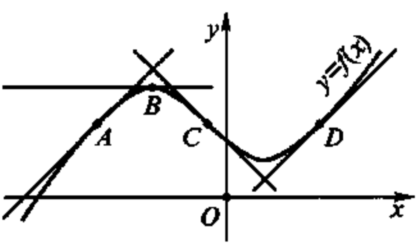

Рис. 18

84. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1,\ x_0 = 1;$

2) $f(x) = x - 3x^2,\ x_0 = 2;$

3) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 3;$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = -2;$

5) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4};$

6) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0;$

7) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1;$

8) $f(x) = \sqrt{x},\quad x_0 = 1.$

---

85. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 1;$

2) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 2;$

3) $f(x) = \sqrt{x+4};$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x+1};$

5) $f(x) = x - 2\sqrt{x+1};$

6) $f(x) = x + \frac{1}{x+1};$

7) $f(x) = e^{2x} + \sin x;$

8) $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1).$

86. Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + e^{-x};$

2) $f(x) = \cos x;$

3) $f(x) = x^2 + \sin x;$

4) $f(x) = \sqrt{x+1} + e^{\frac{x}{2}};$

5) $f(x) = x(x+3) + \frac{2}{2x+1};$

6) $f(x) = \ln(2x+1) + \frac{3}{x+1};$

7) $f(x) = \sqrt{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x+3}};$

8) $f(x) = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}.$

87*. Под каким углом пересекаются графики функций (углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4};$

2) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x-1)^2;$

3) $y = \ln(1+x)$ и $y = \ln(1-x);$

4) $y = e^x$ и $y = e^{-x}.$

88*. Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке — общую касательную; написать уравнение этой касательной:

1) $y = x^4$ и $y = x^6 + 2x^2;$

2) $y = x^4$ и $y = x^3 - 3x^2;$

3) $y = (x+2)^2$ и $y = 2 - x^2;$

4) $y = x(2+x)$ и $y = x(2-x);$

5) $y = \sqrt{x+1}$ и $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 1;$

6) $y = \sqrt{x+1}$ и $y = 2 - \sqrt{1-x}.$

89*. Найти точки графика функции $x = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $k = 1$;
2) $f(x) = x(x+1)$, $k = 3$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, $k = -2$;
4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$, $k = 1$;
5) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $k = \frac{3}{2}$;
6) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $k = \frac{3}{4}$;
7) $f(x) = \sin 2x$, $k = 2$;
8) $f(x) = x + \sin x$, $k = 0$.

90*. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

91*. Найти точки, в которых касательные к кривым $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны. Написать уравнения этих касательных.

92*. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{\sin^2 x + \sin x}$, $x_0 = \pi$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi x^2}{2}$, $x_0 = 1$.

§ 7. Возрастание и убывание функции

С помощью производной можно находить промежутки монотонности функции.

Условимся употреблять название «промежуток» для обозначения либо интервала $(a; b)$, либо отрезка $[a; b]$, либо одного из полуинтервалов $[a; b)$, $(a; b]$. Кроме того, промежутки возрастания или убывания функции будем называть *промежутками монотонности.*

Заметим, что в курсе математического анализа большую роль играет следующая теорема, которая будет использована при доказательстве достаточных условий монотонности функции.

Теорема 1 Лагранжа[1]. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда на этом интервале существует такая точка x_0, что выполняется равенство:*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a). \quad (1)$$

Доказательство этой теоремы приводится в курсе высшей математики. Поясним ее геометрический смысл.

[1] *Лагранж Ж.* (1736—1813) — французский математик, механик и астроном.

Проведем через точки $A\ (a;\ f\ (a))$ и $B\ (b;\ f\ (b))$ прямую l. Угловой коэффициент этой прямой найдем из ΔABC (рис. 19):

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

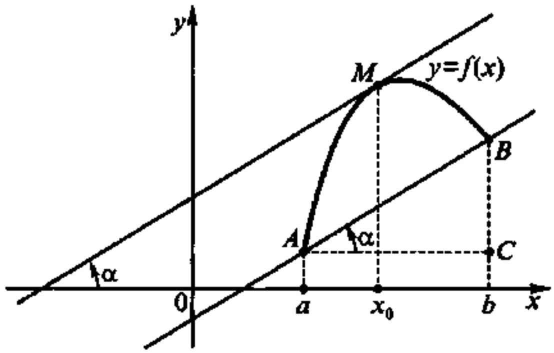

Рис. 19

Напомним, что значение производной $f'\ (x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f\ (x)$ в точке $M(x_0;\ f\ (x_0))$ (см. рис. 19).

Формула (1) показывает, что на графике функции $y = f\ (x)$ есть такая точка $M(x_0;\ f\ (x_0))$, что касательная к графику функции в этой точке параллельна прямой AB (см. рис. 19).

Теорема 2. *Пусть функция $f\ (x)$ непрерывна на промежутке и дифференцируема в его внутренних точках. Тогда, если $f'\ (x) > 0$ во всех внутренних точках, то функция $f\ (x)$ возрастает на этом промежутке; если $f'\ (x) < 0$ во всех внутренних точках, то функция $f\ (x)$ убывает на этом промежутке.*

○ 1) Пусть $f'\ (x) > 0$ во внутренних точках промежутка, x_1, x_2 — произвольные точки этого промежутка, причем $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа имеем

$$f\ (x_2) - f\ (x_1) = f'\ (x_0)\ (x_2 - x_1), \tag{2}$$

где $x_0 \in\ (x_1,\ x_2)$.

Так как $f'\ (x_0) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из формулы (2) получаем $f\ (x_2) - f\ (x_1) > 0$, т.е. $f\ (x_1)\ <\ f\ (x_2)$. Это и означает, что функция $f\ (x)$ возрастает на заданном промежутке (рис. 20).

2) Если $f'\ (x) < 0$ на заданном интервале, то из формулы (2) получаем $f\ (x_2)\ -\ f\ (x_1) < 0$, так как $f'\ (x_0) < 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Отсюда следует, что $f\ (x_1) > f\ (x_2)$, т.е. $f\ (x)$ — убывающая функция (рис. 21). ●

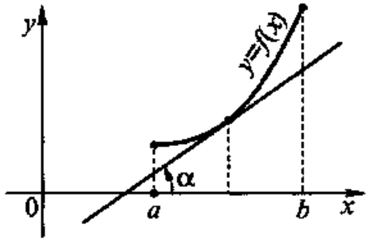

Рис. 20

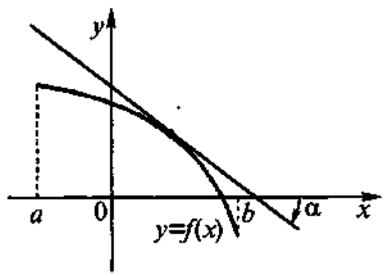

Рис. 21

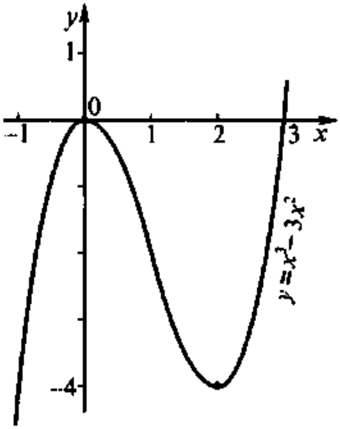

Рис. 22

Задача 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Δ Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Следовательно, $f'(x) > 0$, если $3x^2 - 6x > 0$. Это неравенство выполняется при $x < 0$ и при $x > 2$. Следовательно, функция возрастает на промежутках $x < 0$ и $x > 2$. На интервале $(0; 2)$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, и поэтому функция убывает на этом интервале. ▲

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображен на рисунке 22.

Заметим, что функция $f(x) = x^3 - 3x^2$ возрастает также на промежутках $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$, убывает на отрезке $[0; 2]$ (рис. 22).

Задача 2*. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на отрезке $[1; 2]$.

Δ Область определения этой функции $0 \leqslant x \leqslant 2$. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

1) При $0 < x < 1$ имеем $f'(x) > 0$.

По теореме 2 функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; 1)$, а так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, то она возрастает на этом отрезке.

2) При $1 < x < 2$ имеем $f'(x) < 0$. Это означает, что функция $f(x)$ убывает на этом интервале, а так как она непрерывна на отрезке $[1; 2]$, то она убывает на этом отрезке. ▲

Упражнения

Найти интервалы возрастания и убывания функции (93—96).

93. 1) $y = x^2 - x$; 4) $y = x^2 - 10x + 11$;

2) $y = 5x^2 - 3x - 1$; 5) $y = x^2 + 12x - 100$;

3) $y = x^2 + 2x$; 6) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$.

94. 1) $y = x^2 - 3x + 4$; 3) $y = x^3 - 3x$;

2) $y = 2x - x^2$; 4) $y = x^4 - 2x^2$.

---

95. 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = 3\sqrt{x-5} + 1$;

2) $y = \frac{2}{x} + 1$; 5) $y = x - \sin 2x$;

3) $y = -\sqrt{x-3}$; 6) $y = x + \cos 3x$.

96. 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 3) $y = (x-1)e^{3x}$;

2) $y = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$; 4) $y = x \cdot e^{-3x}$.

97*. На рисунке 23 изображен график функции $y = f'(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Определить промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

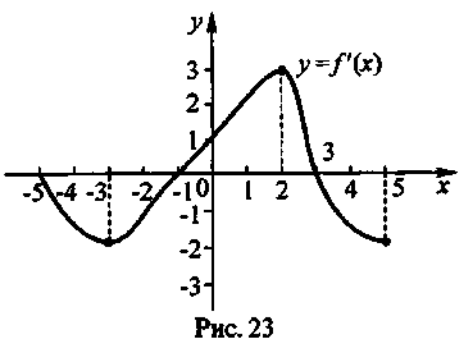

Рис. 23

98*. При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y = x^3 - ax$;

2) $y = ax - \sin x$?

99*. Доказать, что функция $y = \sqrt{6 + x - x^2}$ возрастает на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

§ 8. Экстремумы функции

1. Необходимые условия экстремума

На рисунке 22 изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x = 0$, т.е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют *точкой максимума* этой *функции*.

Аналогично точку $x = 2$ называют *точкой минимума функции* $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше ее значения в остальных точках некоторой окрестности точки $x = 2$.

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$. В этой точке функция принимает наибольшее значение, равное 1.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$. В этой точке функция принимает наименьшее значение, равное 3.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Теорема 1 (Ферма)[1]. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Строгое доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Теорема имеет наглядный геометрический смысл: в точке экстремума касательная параллельна

---

[1] *Ферма́ П.* (1601—1665) — французский юрист и математик.

оси абсцисс и поэтому ее угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 24).

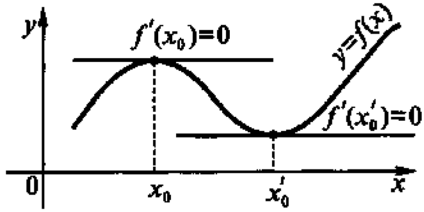

Рис. 24

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 25) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, ее производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$.

Функция $f(x) = (x-2)^2 - 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 26), $f'(x) = 2(x-2)$, $f'(2) = 0$.

Условие $f'(x) = 0$ является *необходимым условием экстремума* дифференцируемой функции $f(x)$. Это означает, что если $x = x_0$ — точка экстремума дифференцируемой функции, то $f'(x_0) = 0$.

Поэтому точки экстремума дифференцируемой функции $f(x)$ следует искать среди корней уравнения $f'(x) = 0$. Однако уравнение $f'(x) = 0$ может иметь корни, которые не являются точками экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума этой функции, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 27).

Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называют *стационарными*.

З а д а ч а 1. Найти стационарные точки функции

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 1.$$

Δ Производная данной функции равна $f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$. Поэтому стационарные точки являются корнями квадратного уравнения $12x^2 - 30x + 12 = 0$.

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. ▲

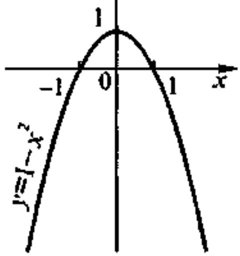

Рис. 25

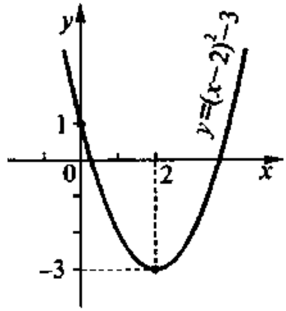

Рис. 26

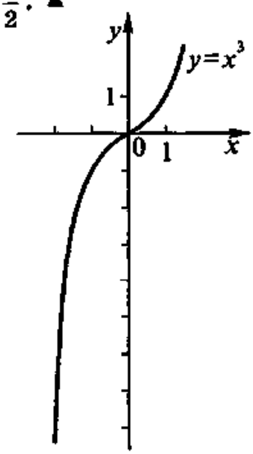

Рис. 27

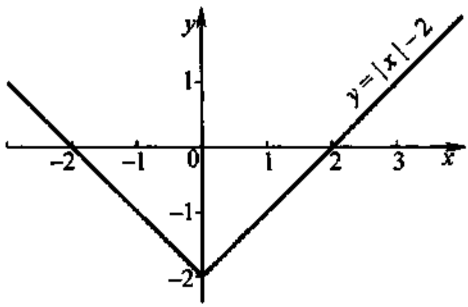

Рис. 28

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, в которой она не имеет производной, например, функция $f(x) = |x| - 2$ не имеет производной в точке $x = 0$, однако эта точка является для нее точкой минимума (рис. 28).

Внутренняя точка области определения функции, в которой эта функция имеет производную, равную нулю, или не имеет производной, называется *критической* точкой этой функции.

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо*, чтобы эта точка была критической для данной функции.

2. Достаточные условия экстремума

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+» при переходе через точку x_0, т.е. в некотором интервале $(a; x_0)$ производная положительна и в некотором интервале $(x_0; b)$ — отрицательна, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 29);

2) если $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 30).

○ Пусть $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. Тогда $f'(x) < 0$ при $a < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < b$. По теореме 2 §7 функция $f(x)$ убывает на промежутке $(a; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; b)$. Тогда $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на интервале $(a; b)$ и поэтому x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Аналогично рассматривается случай максимума (рис. 30). ●

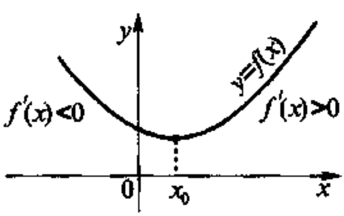

Рис. 29

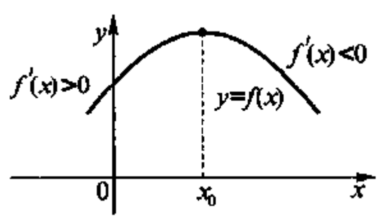

Рис. 30

З а д а ч а 2. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$.

Δ Производная $f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «−». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума. ▲

З а д а ч а 3. Найти экстремумы функции

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x}.$$

Δ Область определения данной функции $x \neq 1$. Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(1-x) - x^3(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^3 + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

Найдем стационарные точки функции. Из равенства $\frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2} = 0$ получим $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

При переходе через точку $x = 0$ ни одно из выражений x^2, $3 - 2x$, $(1 - x)^2$ не меняет знак, поэтому точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x = \frac{3}{2}$ выражения x^2 и $(1 - x)^2$ не меняют знак, а выражение $3 - 2x$ меняет знак с «+» на «−»; это означает, что $x = \frac{3}{2}$ — точка максимума.

Задача 4*. Найти экстремумы функции

$$f(x) = 5x^3 - x\,|x+1|.$$

Δ Если $x \leqslant -1$, то $f(x) = f_1(x) = 5x^3 + x^2 + x$, а если $x \geqslant -1$, то $f(x) = f_2(x) = 5x^3 - x^2 - x$. Тогда $f_1'(x) = 15x^2 + 2x + 1 > 0$ при всех x, а уравнение $f_2'(x) = 15x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, причем $f_2'(x) > 0$ при $x < -\frac{1}{5}$ и $x > \frac{1}{3}$, $f_2'(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$. Функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = -1$ и $f'(x) = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$. Следовательно, $x_0 = -1$, x_1 и x_2 — критические точки функции $f(x)$.

Так как $f'(x) > 0$ при $x < -1$ и при $-1 < x < -\frac{1}{5}$, то x_0 не является точкой экстремума. Производная меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку x_1 и с «−» на «+» при переходе через точку x_2. Следовательно, $x_1 = -\frac{1}{5}$ — точка максимума, а $x_2 = \frac{1}{3}$ — точка минимума функции . ▲

Упражнения

100. Найти стационарные точки функции:

1) $y = x^2 - 6x + 5$;
2) $y = x^2 - 14x + 15$;
3) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$;
4) $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x}$;
5) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;
6) $y = e^{2x} - 2e^x$;
7) $y = \sin x - \cos x$;
8) $y = \cos 2x + 2\cos x$.

101. Найти критические точки функции:

1) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$;
2) $y = |4x^2 - 3|$;
3) $y = \sqrt{x^2+1}$;
4) $y = |3x - x^2|$.

Найти точки экстремума функции (102—103).

102.
1) $y = 2x^2 - 20x + 1$;
2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;
3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$;
4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$;
5) $y = x^3 - 3x^2$;
6) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;
7) $y = x + \sin x$;
8) $y = 6\sin x - \cos 2x$.

103. 1) $y=x+\sqrt{3-x}$;　　　　4) $y=\cos 3x-3x$;

2) $y=(x-1)^{\frac{6}{7}}$;　　　　5) $y=(x-1)^4$;

3) $y=x-\sin 2x$;　　　　6) $y=1-(x+1)^6$.

104*. На рисунке 31 дан график функции, являющейся производной функции $y=f(x)$. Определить промежутки возрастания и убывания функции, ее точки экстремума.

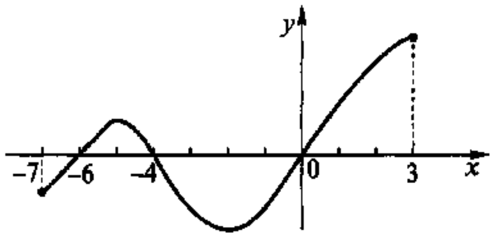

Рис. 31

105*. Найти экстремумы функции:

1) $y=\frac{x^3}{2+x}$;　　　　2) $y=\frac{x^5}{5-x}$.

§ 9. Применение производной к построению графиков функций

Задача 1. Построить график функции $f(x)=x^3-2x^2+x$.

Δ Эта функция определена при всех $x \in R$. С помощью производной найдем промежутки монотонности этой функции и ее точки экстремума. Производная равна $f'(x)=3x^2-4x+1$. Найдем стационарные точки: $3x^2-4x+1=0$, откуда $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трехчлен $3x^2-4x+1$ на множители: $f'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$.

Производная положительна на промежутках $x<\frac{1}{3}$ и $x>1$; следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3}<x<1$ производная отрицательна; следовательно, на этом интервале функция убывает.

Стационарные точки $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ являются точками экстремума. Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа — убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$. Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа — возрастает, ее значение в точке минимума равно $f(1) = 0$. Результаты исследования представим в виде следующей таблицы:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

Знак ↗ означает, что функция возрастает, а знак ↘ означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс: $x^3 - 2x^2 + x = 0$, $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, $x(x-1)^2 = 0$, откуда $x = 0$, $x = 1$.

Для более точного построения графика найдем значения функции еще в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

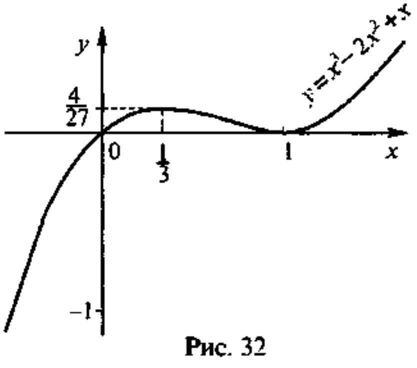

Рис. 32

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 2x^2 + x$ (рис. 32). ▲

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью ее производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.

При исследовании свойств функции полезно найти:

1) область ее определения;

2) производную;

3) критические точки;

4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно представить в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат.

Задача 2. Построить график функции

$$f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5.$$

Δ 1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x)=-5x-5x^4=-5x(1+x^3)$.

3) Решая уравнение $-x(1+x^3)=0$, находим стационарные точки: $x_1=-1$ и $x_2=0$.

4) Производная положительна на интервале $-1<x<0$, следовательно, на этом интервале функция возрастает. На промежутках $x<-1$ и $x>0$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

5) Стационарная точка $x_1=-1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(-1)=-0{,}5$. Тогда $x_2=0$ — точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «−»; $f(0)=1$.

Составим таблицу:

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−0,5	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ (рис. 33). ▲

Так как график функции $y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ построен с помощью исследования свойств этой функции, то по графику можно

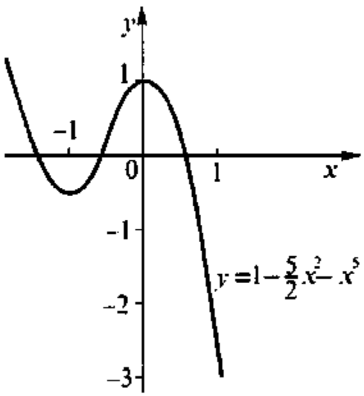

Рис. 33

выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 33 видно, что уравнение $1-\frac{5}{2}x^2-x^5=0$ имеет три разных действительных корня.

Для построения графика четной (нечетной) функции достаточно исследовать свойства и построить ее график при $x>0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Задача 3. Построить график функции $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

Δ 1) Область определения $x\neq 0$.

2) Данная функция нечетная, так как $f(-x)=-x+\frac{4}{-x}=$ $=-\left(x+\frac{4}{x}\right)=-f(x)$. Поэтому сначала исследуем эту функцию и построим ее график при $x>0$.

3) $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

4) На промежутке $x>0$ функция имеет одну стационарную точку $x=2$.

5) Производная положительна на промежутке $x>2$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $0<x<2$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

6) Точка $x=2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(2)=4$.

Составим таблицу:

x	$0<x<2$	2	2
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	4	↗

Найдем значения функции еще в двух точках: $f(1)=5$, $f(4)=5$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y=x+\frac{4}{x}$ при $x>0$. График этой функции при $x<0$ строим с помощью симметрии относительно начала координат (рис. 34). ▲

Для краткости записи решения задач на построение графиков функций большую часть рассуждений, предшествующих таблице, можно проводить устно.

В некоторых задачах (примеры таких задач будут рассмотрены) требуется исследовать функцию не на всей области определения, а только на некотором промежутке.

Задача 4. Построить график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.

Δ Найдем производную: $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 + x)(1 - x)$. Составим таблицу:

x	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Используя эту таблицу, строим график функции $y = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$ (рис. 35). ▲

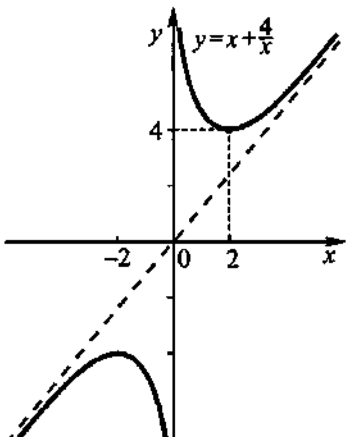

Рис. 34

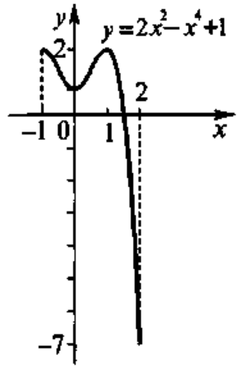

Рис. 35

Упражнения

106. Изобразить эскиз графика функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) Область определения функции $[-4; 8]$; множество значений $[-3; 3]$; $f'(x) > 0$ при $-4 < x < 3$, $f'(x) < 0$ при $3 < x < 8$, точка экстремума $x = 3$.

2) Область определения функции $[-6; 3]$; множество значений $[-5; 2]$; $f'(x) > 0$ при $-3 < x < 0$, $f'(x) < 0$ при $-6 < x < -3$, $0 < x < 3$, точки экстремума $x_1 = -3$, $x_2 = 0$.

Построить график функции (107–113).

107. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;
2) $y = 2 + 3x - x^3$;
3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$;
4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

108. 1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$;
2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
3) $y = \frac{1}{9}x^3(x+4)$;
4) $y = \frac{1}{5}x^3(8-3x)$;
5) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$;
6) $y = 6x^4 - 4x^6$.

---

109. 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$;
2) $y = 3x^5 - 5x^3$;
3) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x$;
4) $y = 4x^5 - 5x^4$;
5) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$;
6) $y = x^5 - x$.

110. 1) $y = -2x - \frac{1}{2x}$;
2) $y = 3x + \frac{1}{3x}$;
3) $y = x - \frac{9}{x}$;
4) $y = \frac{4}{x} - x$;
5) $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$;
6) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

111. 1) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$;
2) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

112. 1) $y = \frac{x^2}{x-2}$;
2) $y = \frac{-x^2+3x-1}{x}$;
3) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$;
4) $y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$.

113*. 1) $y = x^3 - x^2 - x + 1$;
2) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

114*. Сколько действительных корней имеет уравнение
$1 - 2x + 2x^3 - x^5 = 0$?

§ 10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Рассмотрим график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Из рисунка 35 видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках: $x = -1$ и $x = 1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x = 2$.

Точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x = 0$, например отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем отрезке $[-1; 2]$ наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке надо сравнить ее значения в точках минимума и на концах отрезка.

Вообще, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то *для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке* $[a; b]$ *нужно*:

1) найти значения функции на концах отрезка, т.е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти ее значения в критических точках;

3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Δ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}$, $f(2) = 9\frac{1}{2}$;

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$, $3x^4 - 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Отрезку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1$, $f(1) = 4$.

Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее — число $9\frac{1}{2}$, наименьшее — число 4.

Ответ. Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ▲

Задача 2. Найти наибольшее значение функции $g(x) = x\sqrt[4]{6 - x^2}$ на интервале $0 < x < \sqrt{6}$.

Δ Пусть x_0 — точка, в которой функция $g(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале, т.е.

$$g(x) \leqslant g(x_0) \tag{1}$$

при $0 < x < \sqrt{6}$. Заметим, что обе части неравенства (1) положительны. Поэтому неравенство (1) верно тогда и только тогда, когда

$$[g(x)]^4 \leqslant [g(x_0)]^4.$$

Следовательно, точка x_0 является точкой наибольшего значения функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда эта точка является точкой наибольшего значения функции $f(x) = [g(x)]^4 = x^4(6 - x^2) = 6x^4 - x^6$.

Найдем производную $f'(x) = 24x^3 - 6x^5 = 6x^3(2 + x)(2 - x)$. На интервале $0 < x < 2$ функция $f(x)$ возрастает, так как на этом интервале $f'(x) > 0$. На интервале $2 < x < \sqrt{6}$ функция $f(x)$ убывает, так как на этом интервале $f'(x) < 0$. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой максимума функции $f(x)$ и в этой точке функция $f(x)$ принимает наибольшее из ее значений на интервале $0 < x < \sqrt{6}$.

Функция $g(x)$ также принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < \sqrt{6}$ в точке $x = 2$, и это значение равно $g(2) = 2\sqrt[4]{6-2} = 2\sqrt[4]{2}$.

Ответ. $2\sqrt[4]{2}$. ▲

Аналогично, как и при решении задачи 2, можно доказать следующие два утверждения, которые часто используются при решении различных задач.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ и дифференцируема на Δ_1, где Δ_1 — множество всех внутренних точек промежутка Δ, и пусть уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x = x_0$ на Δ_1. Тогда, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ ($x \in \Delta_1$) и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ ($x \in \Delta_1$), то $f(x_0)$ — наименьшее значение функции $f(x)$ на Δ, а если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ ($x \in \Delta_1$) и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ ($x \in \Delta_1$), то $f(x_0)$ — наибольшее значение функции $f(x)$ на Δ.

2. Если $g(x) > 0$ на некотором промежутке, а функция $f(x) = [g(x)]^n$, где n — натуральное число, принимает в точке x_0 из этого промежутка наибольшее (наименьшее) значение, то $g(x_0)$ — наибольшее (наименьшее) значение $g(x)$ на этом промежутке.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$$

на отрезке $[-2; 1]$.

Δ 1) Найдем $f(-2)$ и $f(1)$; получаем

$$f(-2) = -(-2) = 2, \qquad f(1) = 1^2 = 1.$$

2) Найдем критические точки функции. На интервале $(-2; 0)$ производная равна $f'(x) = -1 \neq 0$; на интервале $(0; 1)$ производная равна $f'(x) = 2x \neq 0$; в точке $x = 0$ производная не существует. Таким образом, стационарных точек нет, а критическая точка $x = 0$, причем $f(0) = 0$.

3) Из чисел 2; 1; 0 наибольшее равно 2, наименьшее — 0.

Ответ. На отрезке $[-2; 1]$ наибольшее значение функции равно 2, наименьшее — 0. ▲

Задача 4. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

△ Пусть первый множитель x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел $x + \frac{36}{x}$. По условию, x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на промежутке $x > 0$.

Найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

На промежутке $x > 0$ есть только одна стационарная точка $x = 6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на промежутке $x > 0$ функция $f(x)$ принимает в точке $x = 6$.

Ответ. $36 = 6 \cdot 6$. ▲

Задача 5. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

△ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т.е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 36). Обозначим $AB = x$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора находим $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Площадь прямоугольника равна

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \qquad (1)$$

где $0 < x < 2R$. Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$.

Так как $S(x) > 0$ на интервале $0 < x < 2R$, то функции $S(x)$ и $f(x) = [S(x)]^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

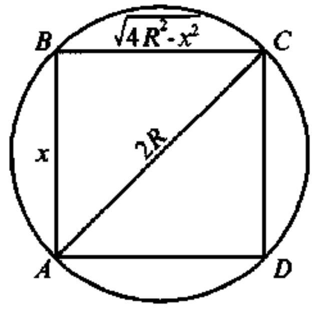

Рис. 36

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x^2(4R^2 - x^2) = 4R^2x^2 - x^4$ принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$.

Найдем производную:

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(R\sqrt{2} + x)(R\sqrt{2} - x).$$

На интервале $0 < x < 2R$ есть только одна стационарная точка $x = R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$ (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x = R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2}$, т.е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь $2R^2$. ▲

Задача 6*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 5x^3 - x|x + 1|$ на отрезке $[-2; 0]$.

△ Данная функция непрерывна на отрезке $[-2; 0]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(-2; 0)$, кроме точки $x_0 = -1$. В § 8 (задача 4) было установлено, что функция $f(x)$ имеет на интервале $(-2; 0)$ две критические точки: точка $x_0 = -1$ не является точкой экстремума, а точка $x_1 = -\frac{1}{5}$ — точка максимума этой функции. Находим значения функции в точке x_1 и в концах отрезка $[-2; 0]$: $f(-2) = -38$, $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{25}$, $f(0) = 0$. Наибольшее из этих чисел — число $\frac{3}{25}$, а наименьшее — число -38.

Ответ. $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{25}$ — наибольшее, $f(-2) = -38$ — наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 0]$. ▲

Упражнения

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (115—117).

115. 1) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ на отрезке $[0; 2]$;

2) $f(x) = 1 + x^2 + x^4$ на отрезке $[1; 3]$;

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке $[-2; 1]$;

4) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x$ на отрезке $[-3; -2]$.

116. 1) $f(x)=\sqrt{x+5}$ на отрезке $[-1; 4]$;

2) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$;

3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; ...]$;

4) $f(x)=x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

117. 1) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$;

2) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

118. Найти наибольшее значение функции:

1) x^5-x^4+3 на интервале $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

2) $1-x^4-x^6$ на интервале $(-3; 3)$;

3) $\frac{2}{x}-x^2$ на промежутке $x<0$;

4) $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$ на промежутке $x<0$.

119. Найти наименьшее значение функции:

1) $x^2+\frac{16}{x^2}$ на промежутке $x>0$;

2) $x+\frac{4}{x}$ на промежутке $x>0$.

120. Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

121. Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

122. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

123. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (**124–126**).

124. 1) $f(x)=1+x+e^{\frac{x-1}{2}}$ на отрезке $[1; 3]$;

2) $f(x)=\sqrt{x}+\ln(2x-1)$ на отрезке $[1; 4]$.

125. 1) $f(x)=\ln x-x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$;

2) $f(x)=x+e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

126. 1) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

127. Найти наибольшее значение функции:

1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;

2) $3x-2x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;

3) $\ln x - x$ на промежутке $x>0$;

4) $2x - e^{2x}$ на интервале $(-1; 1)$.

128. Найти наименьшее значение функции:

1) $\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ на промежутке $x>0$;

2) $x\sqrt{x}-6\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;

3) $e^{3x} - 3x$ на интервале $(-1; 1)$.

4) $\dfrac{1}{x}+\ln x$ на интервале $(0; 2)$.

129. Найти наибольшее значение функции:

1) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$;

2) $\sqrt{x(2-x)}$ на интервале $(0; 2)$;

3) $\sqrt{x^2-2x+2}$ на интервале $(-2; 3)$;

4) $\sqrt{4x - x^2}$ на интервале $(0; 4)$;

5) $x\sqrt[4]{5-x}$ на интервале $(0; 5)$;

6) $x\sqrt[3]{4-x}$ на интервале $(0; 4)$.

130. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{при } x<1, \\ \sqrt{x-1} & \text{при } x\geqslant 1 \end{cases}$ на отрезке $[1; 2]$;

2) $f(x)=\begin{cases} -2x^2-12x-17 & \text{при } x<-2, \\ (x+1)^3 & \text{при } x\geqslant -2 \end{cases}$ на отрезке $[-5; 1]$.

131. Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на оси Ox, а две другие — на параболе $y = 3 - x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.

132*. Равнобедренные треугольники описаны около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 37). Обозначая $BK = x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

133*. Из квадратного листа картона со стороной a (рис. 38) надо сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по углам квадраты и загнув образовавшиеся края. Какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

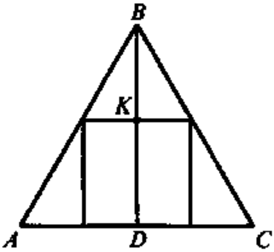

Рис. 37

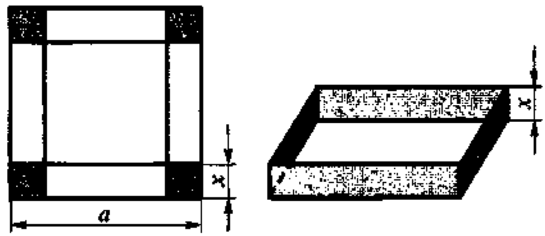

Рис. 38

134*. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

135*. Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу радиуса R и имеющих в основании квадрат, найти параллелепипед наибольшего объема.

136*. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

137*. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

§ 11*. Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба

1. Производная второго порядка

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале $(a;\ b)$ и имеет на этом интервале производную $f'(x)$. Тогда эта производная также является функцией, определенной на интервале $(a;\ b)$.

Если, в свою очередь, функция $f'(x)$ также имеет производную $(f'(x))'$ на интервале $(a;\ b)$, то эту производную называют *второй производной функции* $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т.е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Например: 1) если $f(x) = x^4 - 3x^2$, то

$$f'(x) = 4x^3 - 6x, \quad f''(x) = 12x^2 - 6;$$

2) если $f(x) = \sin 2x$, то

$$f'(x) = 2\cos 2x, \quad f''(x) = -4\sin 2x.$$

Производную $f'(x)$ функции $f(x)$ называют также *первой производной или производной первого порядка* функции $f(x)$; вторую производную $f''(x)$ называют *производной второго порядка* функции $f(x)$.

Ранее было показано, как с помощью первой производной можно находить промежутки возрастания или убывания функции, а также точки экстремума.

Рассмотрим свойства функции, которые устанавливаются с помощью второй производной.

2. Выпуклость функции

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рисунках 39—41.

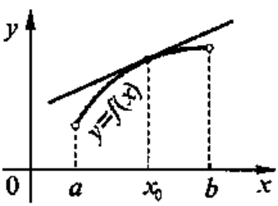

Рис. 39

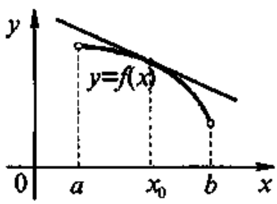

Рис. 40

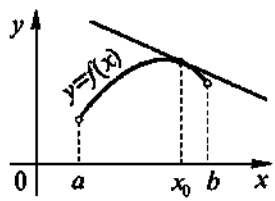

Рис. 41

На рисунках 39–40 представлены графики монотонных функций на интервале $(a; b)$; первая возрастает, вторая убывает; на рисунке 41 изображена функция, которая не является монотонной на этом интервале. Однако все кривые — графики функций (рис. 39— 41) обладают общим свойством. Каждая из этих кривых лежит *ниже* касательной к этой кривой в любой точке с абсциссой x_0 этого интервала. Такие функции (и их графики) называют *выпуклыми вверх*.

Теперь рассмотрим функции, графики которых представлены на рисунках 42—44.

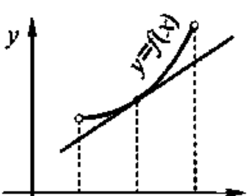

Рис. 42

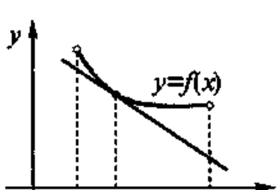

Рис. 43

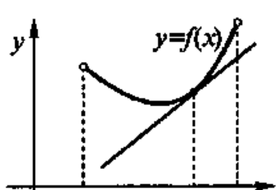

Рис. 44

На рисунках 42–44 первые две функции монотонны на интервале $(a; b)$, а третья — не монотонна. Но все они также обладают общим свойством. Каждая из этих кривых лежит *выше* касательной к этой кривой в любой точке с абсциссой x_0 этого интервала. Такие функции (и их графики) называют *выпуклыми вниз.*

Отметим, что на рисунках 39—44 изображены графики функций, которые на интервале $(a;\ b)$ имеют первые и вторые производные.

Установим связь между выпуклостью функции и второй производной этой функции. Для этого сначала рассмотрим поведение первой производной выпуклой функции (рис. 45).

Так как геометрически первая производная является тангенсом угла между осью Ox и касательной к графику функции, то из рисунка 45 видно, что для выпуклой вверх функции ее первая производная убывает на интервале $(a;\ b)$, а это означает, что ее вторая производная отрицательна.

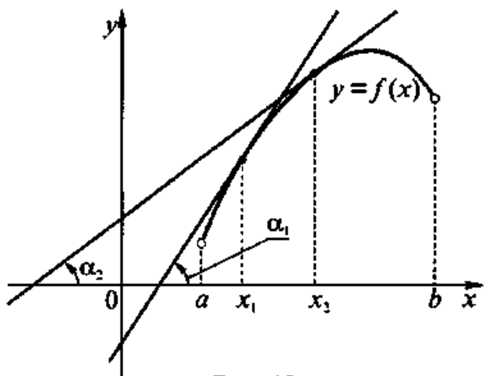

Рис. 45

Аналогично можно показать, что для выпуклой вниз функции ее вторая производная положительна.

Справедливо и обратное утверждение: если функция $f\ (x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную $f''(x)$ и $f''(x) < 0$, то функция $f\ (x)$ выпукла вверх, а если $f''(x) > 0$, то выпукла вниз.

Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют *интервалами выпуклости* этой функции.

Задача 1. Найти интервалы выпуклости функции:

1) $f\ (x) = x^3$; 2) $f\ (x) = \sin x$ на интервале $(-\pi;\ \pi)$.

Δ 1) Найдем производные: $f'\ (x) = 3x^2$; $f''\ (x) = 6x$.

Так как $6x < 0$ при $x < 0$, то на промежутке $x < 0$ данная функция выпукла вверх.

Так как $6x > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $x > 0$ данная функция выпукла вниз (рис. 46).

2) $f'\ (x) = \cos x$; $f''\ (x) = -\sin x$.

Так как $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi$, то $-\sin x < 0$ и поэтому на интервале $(0;\ \pi)$ данная функция выпукла вверх. На интервале $(-\pi\ ;\ 0)$

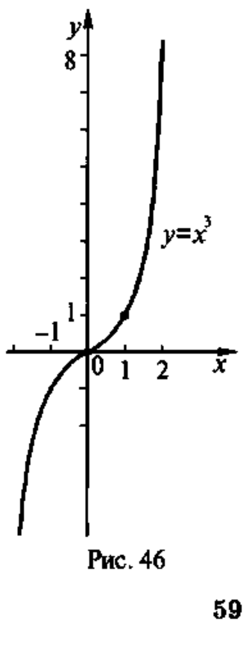

Рис. 46

данная функция выпукла вниз, так как $-\sin x > 0$ на этом интервале (рис. 47). ▲

Отметим, что если функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a; b)$ и $a < x_1 < x_2 < b$, то на интервале $(x_1; x_2)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой, проведенной через точки M_1 и M_2 с абсциссами x_1 и x_2 (рис. 48).

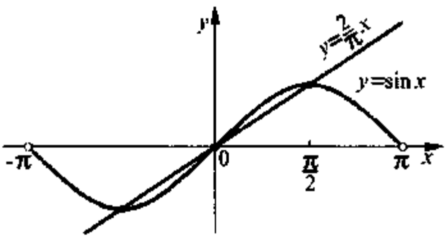

Рис. 47

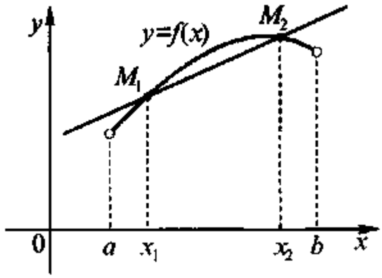

Рис. 48

Задача 2. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

Δ Для доказательства данного неравенства достаточно показать, что на интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ график функции $y = \sin x$ лежит выше графика прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ (см. рис. 47). Графики этих функций пересекаются в точках (0; 0) и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, так как $\sin 0 = \frac{2}{\pi} \cdot 0$ и $\sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi}$.

На интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ выпукла вверх и поэтому ее график лежит выше прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ на этом интервале (см. рис. 47). ▲

3. Точки перегиба

На рисунках 46 и 47 представлены графики функций $y = x^3$ и $y = \sin x$, для которых точка $x = 0$ является точкой перехода от выпуклости вверх к выпуклости вниз (для $y = x^3$) и наоборот (для $y = \sin x$).

Такая точка называется *точкой перегиба* функции (и ее графика). В этой точке функция меняет направление выпуклости.

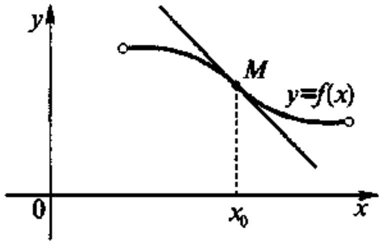

Рис. 49

Отметим, что в окрестности точки перегиба x_0 график функции $y = f(x)$ расположен по разные стороны от касательной к графику в точке $M(x_0; f(x_0))$ (рис. 49).

Задача 3. Найти точки перегиба функции

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Δ Находим производные: $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, $f'' = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.

Так как $(x - 2)e^{-x} < 0$ при $x < 2$ и $(x - 2)e^{-x} > 0$ при $x > 2$, то при переходе через точку $x = 2$ данная функция меняет направление выпуклости, т.е. $x = 2$ — ее точка перегиба. ▲

Задача 4. Найти точки перегиба функции

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Δ Находим производные: $f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$,

$$f''(x) = -\frac{(4x)'(1+x^2)^2 - 4x\left((1+x^2)^2\right)'}{(1+x^2)^4} = \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

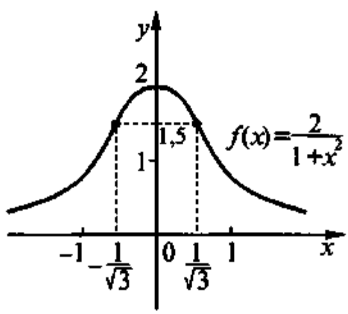

Рис. 50

Так как $3x^2 - 1 > 0$ при $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $3x^2 - 1 < 0$ при $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то точки $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба (рис. 50). ▲

Задача 5. Построить график функции

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}.$$

Δ 1) Область определения: $x \neq 1$, $x \neq 3$.

2) Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}$ методом интервалов (рис. 51).

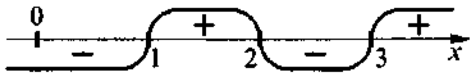

Рис. 51

3) Найдем первую производную:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\right].$$

Из этой формулы видно, что $f'(x) < 0$ при $x \neq 1$ и $x \neq 3$. Следовательно, функция убывает на промежутках $x < 1$, $1 < x < 3$, $x > 3$.

4) Найдем вторую производную:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-3)^3}.$$

Решим неравенство $f''(x) > 0$, т.е.

$$\frac{1}{(x-1)^3} > -\frac{1}{(x-3)^3}.$$

Извлекая корень кубический, получаем

$$\frac{1}{x-1} > -\frac{1}{x-3},$$

откуда

$$\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} > 0.$$

Это неравенство верно при $1 < x < 2$, $x > 3$ (см. рис. 51).

Решая аналогично неравенство $f''(x) < 0$, т.е.

$$\frac{1}{(x-3)^3} < -\frac{1}{(x-3)^3},$$

получаем $x < 1$, $2 < x < 3$ (см. рис. 51).

Следовательно, данная функция выпукла вверх на промежутках $x < 1$, $2 < x < 3$ и выпукла вниз на промежутках $1 < x < 2$, $x > 3$.

Так как в точках $x = 1$ и $x = 3$ функция не определена, то $x = 2$ — единственная точка перегиба. ▲

Используя результаты исследования, строим график данной функции (рис. 52).

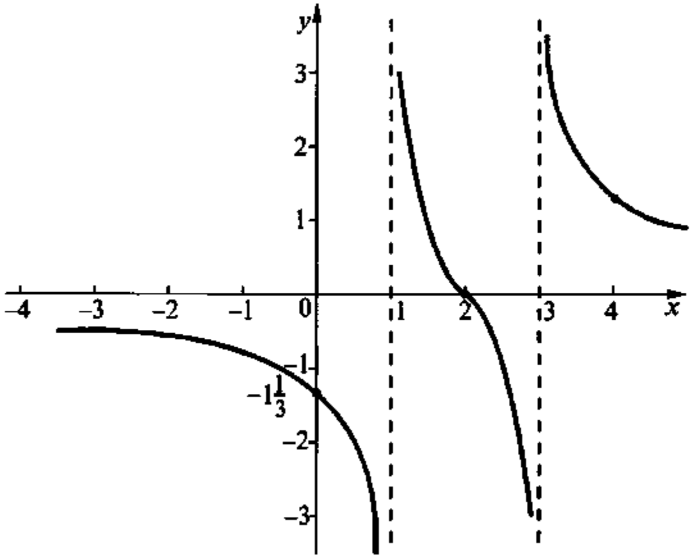

Рис. 52

Упражнения

138. Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 \cos x$;
2) $f(x) = x^3 \sin x$;
3) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$;
4) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6$.

139. Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = (x+1)^4$;
2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$;
3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$;
4) $f(x) = x^3 - 6x \ln x$.

140. Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \cos x$, $-\pi < x < \pi$;
2) $f(x) = x^5 - 80x^2$;
3) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$;
4) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$, $-\pi < x < \pi$.

141. Построить график функции:

1) $y = x^5 - 2x^3 + x$;
2) $y = (x+3)\sqrt{x}$;
3) $y = x^2 \ln x$;
4) $y = x^2 + \frac{1}{x}$;
5) $y = \frac{(x+2)^2}{x^2}$;
6) $y = \frac{x^2}{(x+2)^3}$.

Упражнения к главе I

142. Построить график функции $y = f(x)$ и выяснить, является ли эта функция непрерывной на всей числовой прямой:

1) $f(x)=\begin{cases}3x-4 \text{ при } x\neq 3,\\ 2 \quad\quad \text{ при } x=3;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}5-2x \text{ при } x\neq 1,\\ -1 \quad\quad \text{ при } x=1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \text{ при } x\geqslant 0,\\ x \quad \text{ при } x<1;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}|x-1| \text{ при } x<-1,\\ x^2 \quad \text{ при } x\geqslant -1.\end{cases}$

Найти производную функции (143–148).

143. 1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4$; 2) $-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$;

3) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x+3)^8$; 6) $(4 - 3x)^7$;

7) $\sqrt[3]{3x-2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$; 9) $\sin 0{,}5x$; 10) $\cos(-3x)$.

144. 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \ln x$; 3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

145. 1) $\sin 5x + \cos(2x-3)$; 3) $\sin(x-3) - \ln(1-2x)$;

2) $e^{2x} - \ln 3x$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.

146. 1) $x^2\cos x$; 2) $x^3\ln x$; 3) $5xe^x$;

4) $x\sin 2x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x\cos x$.

147. 1) $\frac{x^3+1}{x^2+2}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.

148. 1) $\ln^2 x$; 2) $\sqrt{\ln x}$; 3) $\sin\sqrt{x}$; 4) $\cos^4 x$.

149. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2$; 4) $f(x) = (x+3)^3(x-4)^2$;

2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$; 5) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$;

3) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

150. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = \cos x\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 3) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

2) $f(x) = e^x\ln x$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$, $x_0 = 0$.

151. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 2x,\ x_0 = 3$;
3) $y = \sin\ x,\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$;
2) $y = x^3 + 3x,\ x_0 = 3$;
4) $y = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

152. Закон движения тела задан формулой $s\,(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройден телом за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

153. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$;
3) $y = \frac{3}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$;
4) $y = \frac{2}{x-3}$.

154. Найти стационарные точки функции:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$;
3) $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x}$;
2) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;
4) $y = \cos 2x + 2\cos x$.

155. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$;
2) $y = 3x^4 - 4x^3$.

156. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^5 - 2{,}5x^2 + 3$;
2) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 - 3$.

157. Построить графики функции:

1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$;
2) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

158. Построить график функции:

1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0; 3]$;

2) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 4]$.

159. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f\,(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2; 2]$;
2) $f\,(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-4; 0]$;
3) $f\,(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-4; 3]$;
4) $f\,(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$.

160. Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

161. Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

162. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объема.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 4x - 1$ в точке $x = 3$.

2. Найти производную функции:

$$\frac{3}{x} + 2\sqrt{x} - e^x; \quad (3x-5)^4; \quad 3\sin 2x \cdot \cos x; \quad \frac{x^3}{x^2+5}.$$

3. Найти угол между касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ и осью Ox.

4. Построить график функции

$$y = 2x^4 - x^2 + 1; \qquad y = x^3 - 3x.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 5]$.

6. Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объем параллелепипеда был наибольшим?

163. Построить график функции и указать промежутки, на которых функция непрерывна:

1) $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-1) & \text{при } x \leqslant 3, \\ (x-5)^2 & \text{при } x > 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{при } x > 3, \\ x+3 & \text{при } -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ (x+3)^2 & \text{при } x < -3. \end{cases}$

Найти производную функции (164–166).

164. 1) $y = \cos^2 3x$;
2) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$;
3) $y = \sin x \cos x + x$;
4) $y = (x^3 + 1)\cos 2x$;
5) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$;
6) $y = \sqrt[3]{x-1}\,(x^4 - 1)$.

165. 1) $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$;
2) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{4x}$;
3) $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$;
4) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

166. 1) $\sin(2x^2-3x)$; 2) $\cos(x+2x^3)$; 3) $e^{\sin x}$;

4) $\cos(e^x)$; 5) 3^{x^2}; 6) $2^{\cos x}$.

167. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x)=2^x+2^{-x}$;
2) $f(x)=3^{2x}-2x\ln 3$;
3) $f(x)=x+\ln 2x$;
4) $f(x)=x+\ln(2x+1)$;
5) $f(x)=6x-x\sqrt{x}$;
6) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-3x$.

168. Найти все значения a, при которых $f'(x)\geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x)=x^3+3x^2+ax$.

169. Найти все значения a, при которых $f'(x)<0$ для всех действительных значений x, если $f(x)=ax^3-6x^2-x$.

170. Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x)=0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x)=ax^2-\dfrac{1}{x^2}$;
2) $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$;
3) $f(x)=ax^3+3x^2+6x$;
4) $f(x)=x^3+6x^2+ax$.

171. Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x)<0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x)=ax^7+x^3-1$;
2) $f(x)=x^5+ax^3+3$;
3) $f(x)=(x+a)\sqrt{x}$;
4) $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$.

172. Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y=2\sqrt{x}$ *и* $y=2\sqrt{6-x}$; 2) $y=\sqrt{2x+1}$ *и* $y=1$?

173. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$, $x_0=\dfrac{3\pi}{2}$;
2) $y=2^{-x}-2^{-2x}$, $x_0=2$;
3) $y=\dfrac{x+2}{3-x}$, $x_0=2$;
4) $y=x+\ln x$, $x_0=e$;
5) $y=e^{x^2-1}$, $x_0=1$;
6) $y=\sin(\pi x^2)$, $x_0=1$.

174. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной оси Ox, если:

1) $f(x)=x^2-4x$;
2) $f(x)=(x-1)(x-2)$;
3) $f(x)=x^4+32x-3$;
4) $f(x)=x^6+6x-2$.

175. Доказать, что функция $y=1{,}8x^5-2\dfrac{1}{3}x^3+7x+12{,}5$ возрастает на всей области определения.

176. Доказать, что функция $y=x(1+2\sqrt{x})$ возрастает на всей области определения.

177. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x \ln x$;

2) $y = xe^x$;

3) $y=\frac{4}{x-3}-\frac{16}{x-7}$;

4) $y=\frac{25}{7-x}-\frac{9}{3-x}$.

178. Построить график функции:

1) $y=\frac{2}{x^2-4}$;

2) $y=\frac{2}{x^2+4}$;

3) $y=(x-1)^2(x+2)$;

4) $y=x(x-1)^3$.

179. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$;

3) $f(x)=3\sin x+4\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x)=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

180. Найти наибольшее значение функции:

1) $x\sqrt[3]{5-3x^2}$ на интервале $\left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$;

2) $x\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(0; 1)$.

181. Тело движется по закону $s(t)=6t^2-t^3$. Какова наибольшая скорость тела?

182. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

183*. Найти точку касания графика функции $y=f(x)$ и данной прямой, если:

1) $y=3x^2+2x-5$, $y=2x-5$;

2) $y=3x^2-2x+5$, $y=10x-7$;

3) $y=x^3-5x+8$, $y=7x+24$;

4) $y=x^3+3x^2-3x+1$, $y=-6x-5$.

184*. При каком значении a график функции $y=x^2+a$ касается прямой $y=-4x+5$?

185*. Найти уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$.

186*. Прямая касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ в точке $(1; 4)$. Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

187*. Прямая касается гиперболы $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, в точке с абсциссой x_0.

1) Доказать, что площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания; найти эту площадь.

2) Доказать, что эта касательная проходит через точки $\left(x_0; \frac{k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$.

188*. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

189*. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объем был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось бы $\frac{5}{2}$?

190*. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

191*. Построить график функции:

1) $y = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{x+1}$; 3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$;

2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$; 4) $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

192*. Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 53). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором сила будет наименьшей, если коэффициент трения груза k.

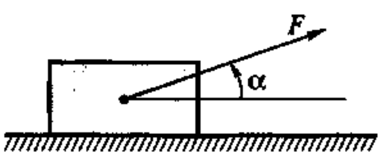

Рис. 53

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Основными понятиями математического анализа являются понятия функции, предела, производной и интеграла.

Термин *«функция»* впервые был употреблен в 1692 г. немецким математиком *Г. Лейбницем* (1646–1716). Первое определение понятия функции, основанное на геометрических представлениях, сформулировал в 1718 г. швейцарский математик *И. Бернулли* (1667–1748). В 1748 г. *Л. Эйлер* (1707–1783) дал более универсальное, чем у Бернулли, определение функции. Ему же принадлежит и введение символа $f(x)$. И Бернулли, и Эйлер фактически отождествляли функцию с ее аналитической формулой, хотя уже современники Эйлера понимали, что функцию можно задавать не только аналитически.

В 1834 г. великий русский математик *Н.И. Лобачевский* (1792–1856) дал определение понятия функции на основе идеи соответствия элементов двух числовых множеств. В 1837 г. немецкий математик *П. Дирихле* (1805–1859) сформулировал обобщенное определение понятия функции: «y является функцией переменной x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если каждому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем не важно, каким образом установлено это соответствие — формулой, графиком, таблицей или словесным описанием».

После открытия *теории множеств* во второй половине XIX в. определение понятия функции было дано на множественной основе. В XX в., в связи с развитием естественных наук, происходило дальнейшее расширение понятия функции. Так, в 1936 г. российский математик, академик *С.Л. Соболев* (1908–1990) дал наиболее обобщенное определение понятия функции.

Понятие *производной* определяется через понятие *предела*, история появления которого уходит в глубокую древность. Еще в IV в. до н. э. знаменитый древнегреческий математик *Евдокс Книдский* в неявном виде использовал предельные переходы для обоснования методов вычисления площадей криволинейных фигур. В явном виде предельные переходы встречаются в работе фламандского математика *А. Такке* (1612–1660) «Начала плоской и телесной геометрии», опубликованной в 1654 г. Первое определение предела дал английский математик *Д. Валлис* (1616–1703). Метод пределов получил свое развитие в работах знаменитого английского ученого *И. Ньютона* (1643–1727). Ему же принадлежит введение символа lim.

Существенный вклад в развитие основ дифференциального исчисления внесли французские ученые *П. Ферма* (1601–1665) и *Р. Декарт* (1596–1650). В середине 60-х гг. XVII в. Ньютон пришел к понятию производной, решая задачи механики, связанные с нахождением мгновенной скорости. Результаты своей работы он в 1671 г. изложил в трактате «Метод флюкций и бесконечных рядов». Однако этот трактат был опубликован лишь в 1736 г. и поэтому первой работой по дифференциальному исчислению считается статья Лейбница, опубликованная в 1684 г., в которой рассматривается геометрическая задача о проведении касательной к кривой.

Приращение абсциссы — бесконечно малую разность $x_2 - x_1$ — Лейбниц обозначал dx (d — первая буква лат. сл. *differentia* — разность), а приращение ординаты $y_2 - y_1$ обозначал dy. В середине XVIII в. Эйлер для обозначения приращений стал пользоваться греческой буквой Δ. Термин «производная» (по-франц. derivée) впервые появился в 1800 г. в книге французского математика *Л. Арбогаста* (1759–1803) «Вычисление производных». Обозначение производной y' и $f'(x)$ ввел французский математик *Ж. Лагранж* (1736–1813).

Одним из самых значительных этапов в развитии математического анализа ученые считают признанные лекции в Политехнической школе в Париже знаменитого французского математика *О. Коши* (1789–1857). Эти лекции, изданные в 1823 г., были существенным приближением теории дифференциального исчисления к ее современному изложению.

Как и многие разделы математики, дифференциальное исчисление возникло из необходимости решения практических задач. В основном источниками дифференциального исчисления явились задачи двух видов: а) на нахождение наибольших и наименьших значений величин, т.е. задачи на нахождение *экстремумов* (от лат. *extremum* — крайнее); б) на вычисление скоростей. В древности и в средние века задачи этих видов решались геометрическими и механическими методами и не связывались общими идеями.

Задачи на нахождение максимума и минимума можно найти еще в «Началах» *Евклида* (III в. до н. э.). Так, в VI книге «Начал» доказывается, что из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольшую площадь имеют те, основание которых равно половине основания треугольника.

В 1615 г. в опубликованной работе «Стереометрия винных бочек» немецкий ученый *И. Кеплер* (1571–1630) высказал идею о том, что вблизи максимума величины ее изменения незаметны, предугадав тот факт, что в точке максимума производная функции равна нулю. Известно, что в 1629 г. французский математик П. Ферма владел методом определения максимумов и минимумов. И только в середине XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц исследовали проблему максимумов и минимумов функций с позиций идеи бесконечно малой величины. Так Лейбницем была сформулирована теорема о достаточном условии возрастания и убывания функции на отрезке.

Значительный вклад в развитие дифференциального исчисления в результате решения прикладных задач внесли швейцарские математики *Я. Бернулли* (1654–1705) и *И. Бернулли* (1667–1748). Голландский ученый *Х. Гюйгенс* (1629–1695) после решения задачи о форме подвешенной за концы массивной цепи написал известному французскому математику *Г. Лопиталю* (1661–1704) о широте применимости методов дифференциального исчисления: «Я вижу с удивлением и восхищением обширность и плодовитость нового метода. Куда бы я ни обратил взор, я замечаю для него новые приложения, я предвижу его бесконечное развитие и прогресс».

В 1755 г. Л. Эйлер в своей работе «Дифференциальное исчисление» развил понятия «абсолютных экстремумов» и «относительных экстремумов», называемых им экстремумами «местного характера». В этой работе он подчеркивал, что значение функции в точке максимума вообще говоря не совпадает с ее наибольшим значением. Для исследования функций Эйлер пользовался не только первой и второй производными, но и производными более высоких порядков.

Отметим, что теория экстремумов функций и сегодня находит многочисленные практические применения в решении задач производства и экономики, связанных с оптимальным использованием сырья и времени.

§ 12. Первообразная

В главе I была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости точки по заданному закону движения. Пусть закон движения точки задан функцией $s = s(t)$, где s — путь, пройденный за время t. Тогда мгновенная скорость v движения тела в момент времени t равна $v = s'(t)$. В этой задаче по заданной функции $s(t)$ вычисляется ее производная $s'(t)$. Например, если $s=\frac{at^2}{2}$, то

$$v = s'(t) = at.$$

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости $v = v(t)$ найти закон движения, т.е. найти $s = s(t)$. Так как $s'(t) = v(t)$, то в этой задаче требуется найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. В этом случае функцию $s(t)$ называют *первообразной для функции* $v(t)$.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция x^3 является первообразной для функции $3x^2$, так как $(x^3)' = 3x^2$; функция $\sin x$ — первообразная для функции $\cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Задача 1. Показать, что функция $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos 3x$.

Δ Так как $F'(x)=\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cos 3x=\cos 3x$, то $\frac{1}{3}\sin 3x$ — первообразная для функции $\cos 3x$. ▲

Задача 2. Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной для функции $f(x) = x^p$ на промежутке $x > 0$.

Δ Так как $(x^{p+1})' = (p + 1)\,x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)'=\frac{(x^{p+1})'}{p+1}=x^p$. ▲

В частности, при $p = 0, 1, 2, -2, \frac{1}{2}$ получаем:

1) $F(x) = x$ — первообразная для функции $f(x) = 1$;

2) $F(x)=\frac{x^2}{2}$ — первообразная для функции $f(x) = x$;

3) $F(x)=\frac{x^3}{3}$ — первообразная для функции $f(x)=x^2$;

4) $F(x)=-\frac{1}{x}$ — первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$;

5) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ — первообразная для функции $f(x)=\sqrt{x}$.

В примерах 1—3 функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на всей числовой прямой, в примере 4 функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $x<0$, а также на промежутке $x>0$, в примере 5 функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке $x \geqslant 0$.

Заметим, что для функции $f(x)=x$ функции $\frac{x^2}{2}+1$, $\frac{x^2}{2}-3$ также являются первообразными, так как $\left(\frac{x^2}{2}+1\right)'=x$, $\left(\frac{x^2}{2}-3\right)'=x$. Вообще, любая функция $\frac{x^2}{2}+C$, где C — постоянная, является первообразной для функции x. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю.

Этот пример показывает, что для заданной функции ее первообразная неоднозначно определяется.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $F(x)+C$, где C — любая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Оказывается, что функциями вида $F(x)+C$ исчерпываются все первообразные для заданной функции $f(x)$. Доказательство этого факта основывается на следующей лемме:

Лемма. *Если $F'(x)=0$ на некотором промежутке, то на этом промежутке $F(x)=C$,* где *C — постоянная.*

Эта лемма доказывается с помощью теоремы Лагранжа (§ 7).

Ее можно наглядно пояснить, используя геометрический смысл производной. Так как $F'(x)=0$, то касательная к графику функции $y=F(x)$ в каждой точке горизонтальна и поэтому ее график совпадает с отрезком горизонтальной прямой.

Физический смысл леммы заключается в следующем: если скорость точки равна нулю, то точка остается на месте и поэтому пройденный ею путь не меняется.

Теорема. *Пусть $F_1(x)$* и *$F_2(x)$ — две первообразные для одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_2(x)=F_1(x)+C$, где C — некоторая постоянная.*

○ Обозначим $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$. Тогда $F'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=$ $=f(x)-f(x)=0$.

По лемме, $F(x)=C$, т. е. $F_2(x)-F_1(x)=C$, откуда $F_2(x)=$ $=F_1(x)+C$. ●

Итак, если $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, то все первообразные для функции $f(x)$ находятся по формуле $F(x)+C$, где C — любая постоянная.

Задача 3. Найти все первообразные для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Δ Из задачи 2 при $p=-\frac{1}{2}$ следует, что $2\sqrt{x}$ — первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответ. $2\sqrt{x}+C$. ▲

Приведем таблицу первообразных для некоторых функций.

Функция	Первообразные
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x\neq 0$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$

Эта таблица проверяется дифференцированием первообразных. Например, так как $(\ln\lvert x\rvert+C)'=\frac{1}{x}$, то $\ln\lvert x\rvert+C$ — первообразная для функции $\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$.

Замечание. Во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция является первообразной для функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены.

Например, в задаче 3 функция $2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $x>0$.

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$, то все первообразные получаются прибавлением к $F(x)$ любой постоянной: $F(x)+C$. Следовательно, графики функций $y=F(x)+C$ получаются из графика $y=F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 54). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

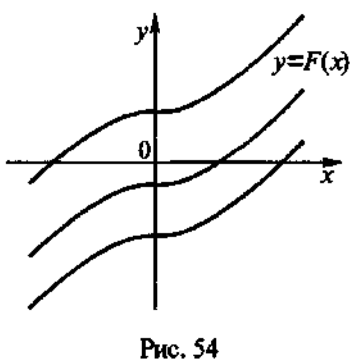

Рис. 54

Задача 4. Для функции $\frac{1}{x^2}$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку $(1; 3)$.

Δ Все первообразные функции $\frac{1}{x^2}$ находятся по формуле $F(x) = -\frac{1}{x}+C$. Найдем такое C, чтобы график функции $y = F(x)$ проходил через точку (1; 3), т.е. воспользуемся условием $F(1) = 3$. Отсюда $-1 + C = 3$, $C = 4$. Следовательно, $F(x) = 4-\frac{1}{x}$. ▲

Упражнения

193. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x)=\frac{x^4}{4}$, $f(x)=x^3$;
2) $F(x)=\frac{x^5}{5}+1$, $f(x)=x^4$;
3) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$;
4) $F(x) = 1 + \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$;
5) $F(x) = \cos 3x - 2$, $f(x) = -3\sin 3x$;
6) $F(x) = 1 - e^{-x}$, $f(x) = e^{-x}$.

194. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ при $x > 0$:

1) $F(x)=\frac{2}{x}$, $f(x)=-\frac{2}{x^2}$;
3) $F(x)=2-x^{\frac{3}{2}}$, $f(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x}$;
2) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+1$, $f(x)=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$;
4) $F(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

195. Найти все первообразные для функции:

1) x^5; 2) x^4; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\sqrt[3]{x}$; 5) $x^{\frac{2}{5}}$; 6) $x^{-\frac{3}{4}}$.

---

196. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = x^2$, $M(1; 2)$;
3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $M(1; -1)$;
2) $f(x) = x$, $M(-1; 3)$;
4) $f(x)=\sqrt{x}$, $M(9; 10)$.

§ 13. Правила нахождения первообразных

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием*.

Правила интегрирования можно получить с помощью правил дифференцирования. Напомним правила дифференцирования.

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ имеют производные на некотором промежутке, a, b, k — постоянные. Тогда:

1) $[F(x)+G(x)]'=F'(x)+G'(x)$;

2) $[aF(x)]'=aF'(x)$;

3) $[F(kx+b)]'=kF'(kx+b)$.

Из этих правил дифференцирования следуют *правила нахождения первообразных*.

Пусть $F(x)$, $G(x)$ — первообразные соответственно для функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, т. е.

$$F'(x)=f(x),\ \ G'(x)=g(x),$$

и пусть a, b, k — постоянные, $k \neq 0$. Тогда:

1) $F(x)+G(x)$ — первообразная для функции $f(x)+g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$;

3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$, $k \neq 0$.

Приведем примеры применения этих правил.

Задача. Найти первообразные $F(x)$ для функции $f(x)$:

1) $f(x)=e^x+\sin x$; 2) $f(x)=x^2+3\cos x$;

3) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+e^{2x}$.

Δ 1) Так как e^x — первообразная для e^x, а $-\cos x$ — первообразная для $\sin x$, то $e^x-\cos x$ — одна из первообразных для функции $e^x+\sin x$.

Ответ. $F(x)=e^x-\cos x+C$.

2) Первообразная для x^2 равна $\frac{x^3}{3}$, первообразная для $\cos x$ равна $\sin x$, следовательно, одна из первообразных для $x^2+3\cos x$ равна $\frac{x^3}{3}+3\sin x$.

Ответ. $F(x)=\frac{x^3}{3}+3\sin x+C$.

3) Обозначим $f_1(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $f_2(x)=e^{2x}$. Тогда $F_1(x)=-\frac{1}{x+1}$, $F_2(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ — первообразные соответственно для $f_1(x)$ и $f_2(x)$,

$F(x)=F_1(x)+F_2(x)+C=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$ — все первообразные для функции $f(x)$, $x \neq -1$.

Ответ. $F(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$, $x \neq -1$. ▲

Третье правило нахождения первообразных позволяет дополнить таблицу первообразных, приведенную в предыдущем параграфе:

Функция	Первообразная
$(kx+b)^p$, $p \neq -1$, $k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{kx+b}$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
e^{kx+b}, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin(kx+b)$, $k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\cos(kx+b)$, $k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$

Приведем примеры применения этих формул:

Функция	Первообразная
$(3x-1)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$
$\frac{1}{2-3x}$	$-\frac{1}{3}\ln\lvert 2-3x\rvert+C$
e^{3-4x}	$-\frac{1}{4}e^{3-4x}+C$
$\sin(5x+2)$	$-\frac{1}{5}\cos(5x+2)+C$
$\cos(5x+2)$	$\frac{1}{5}\sin(5x+2)+C$

Упражнения

Найти первообразные для функции (197–204).

197. 1) $2x^5-3x^2$; 2) $5x^4+2x^3$; 3) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}$; 5) $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$; 6) $4\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$;

7) $3x^3+2x-1$; 8) $6x^2-4x+3$.

198. 1) $3\cos x-4\sin x$; 2) $5\sin x+2\cos x$; 3) $e^x-2\cos x$;

4) $3e^x-\sin x$; 5) $5-e^x+3\cos x$; 6) $1+3e^x-4\cos x$;

7) $6\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}+3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^x$.

199. 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$;

4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$; 5) $\frac{1}{x-1}+4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3}-2\sin(x-1)$.

200. 1) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^7$; 2) $\left(\frac{1}{3}x+2\right)^5$; 3) $(2x-3)^{\frac{2}{5}}$;

4) $(3x-1)^{\frac{3}{4}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}$; 6) $\frac{4}{\sqrt{4x+1}}$;

7) $\sqrt{3-2x}$; 8) $\sqrt[3]{2-3x}$.

201. 1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$; 3) $\cos(5x-2)$;

4) $\sin(3x-4)$; 5) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 6) $\cos\left(\frac{x}{4}+5\right)$;

7) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 8) e^{3x-5}.

---

202. 1) $e^{2x}-\cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}}+\sin 2x$; 3) $2\sin\frac{x}{5}-5e^{2x+\frac{1}{3}}$;

4) $3\cos\frac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$; 5) $\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-3\cos(6x-1)$;

6) $\sqrt{\frac{x}{5}}+4\sin(4x+2)$; 7) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}$; 8) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}$.

203. 1) $\frac{2x^4-4x^3+x}{3}$; 2) $\frac{6x^3-3x+2}{5}$; 3) $\frac{2x^3-3x}{x^2}$;

4) $\frac{3x^4+5x^2}{x^3}$; 5) $3x(2-x^2)$; 6) $2x(1-x)$;

7) $(1+2x)(x-3)$; 8) $(2x-3)(2+3x)$.

204. 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

205. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=2x+3$, $M(1;2)$; 5) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2};5\right)$;

2) $f(x)=4x-1$, $M(-1;3)$; 6) $f(x)=\cos 3x$, $M(0;0)$;

3) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $M(2;-3)$; 7) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $M(-2;4)$;

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$, $M(-2;-1)$; 8) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $M(-2;2)$.

§ 14. Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление

1. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке 55. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей положительные значения, а с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой криволинейной трапеции.

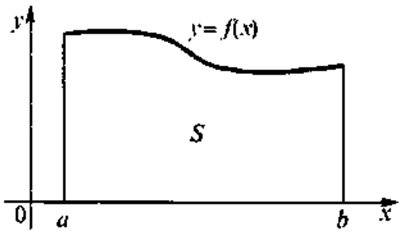

Рис. 55

Поясним, как вводится понятие площади криволинейной трапеции и как можно вычислить эту площадь. Для этого введем понятие интеграла.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (не обязательно равных) точками $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ и проведем через эти точки вертикальные прямые. При этом криволинейная трапеция разобьется на n частей, каждая из которых также является криволинейной трапецией (рис. 56). Обозначим $x_0 = a$, $x_n = b$.

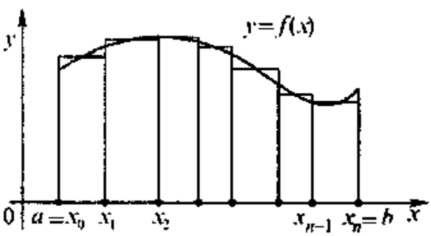

Рис. 56

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ (рис. 57). Если длина отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ мала, то эта трапеция мало отличается от прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(c_k)$, где c_k — какая-нибудь точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Поэтому естественно считать, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ приближенно равна площади этого прямоугольника, т. е. приближенно равна $f(c_k)\,\Delta x_k$.

Вся криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ мало отличается от многоугольника, состоящего из прямоугольников, построенных указанным способом на отрезках $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ (рис. 58). Поэтому естественно считать, что площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади этого многоугольника, т. е. приближенно равна

$$f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_k)\,\Delta x_k + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \qquad (1)$$

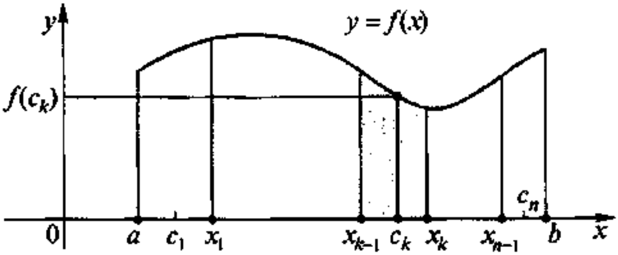

Рис. 57

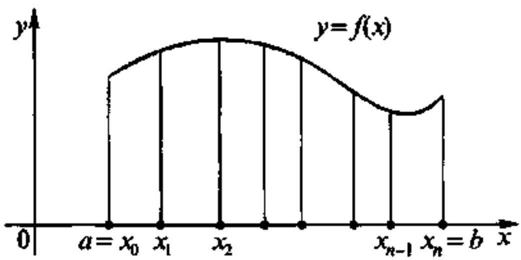

Рис. 58

Сумму (1) называют *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ стремилась к нулю. Тогда длина Δx_k каждого отрезка также будет стремиться к нулю. Можно доказать, что при этом интегральные суммы стремятся к некоторому числу S, т.е. имеют предел, равный S. Это число S называют *площадью рассматриваемой криволинейной трапеции* (см. рис. 55).

2. Интеграл

Рассмотрим теперь любую непрерывную на отрезке $[a; b]$ функцию $f(x)$ (не обязательно положительную). Составим для нее интегральную сумму (1) и затем будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a; b]$ так, чтобы длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ стремилась к нулю. Можно доказать (это доказывается в курсе высшей математики), что и в этом случае интегральные суммы стремятся к некоторому числу, т.е. имеют предел. Этот предел называют *интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$* и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

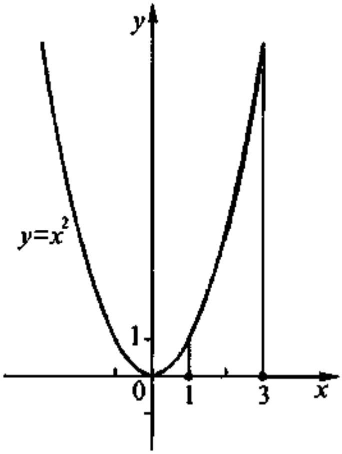

Рис. 59

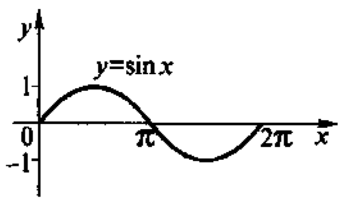

Рис. 60

В частности, если функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a; b]$, получаем формулу для площади криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Например, площадь окрашенной фигуры на рисунке 59 равна $\int_1^3 x^2\,dx$.

Формула (2) справедлива и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Например, площадь окрашенной фигуры на рисунке 60 равна $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

Таким образом, задача о нахождении площади криволинейной трапеции сводится к вычислению интеграла. К вычислению интеграла сводятся также многие другие геометрические и физические задачи. Примеры таких физических задач будут рассмотрены в § 16. В курсе геометрии могут быть рассмотрены примеры вычисления с помощью интегралов объемов тел (пирамиды, конуса, шара и т.д.).

3. Вычисление интегралов

Приближенное значение интеграла можно получить, составив интегральную сумму. Однако непосредственное нахождение предела интегральных сумм часто оказывается трудоемким. Для вычисления интегралов обычно используется следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Формула (3) справедлива для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$. В частности, эта формула справедлива для всех изученных ранее функций (степенной, показательной, тригонометрической и пр.) на каждом отрезке [a; b], где эти функции определены.

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Поясним геометрически, как получается формула (3).

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием [a; x] (рис. 61), где x — любая точка отрезка [a; b].

При $x = a$ отрезок [a; x] вырождается в точку и поэтому естественно считать, что $S(a) = 0$.

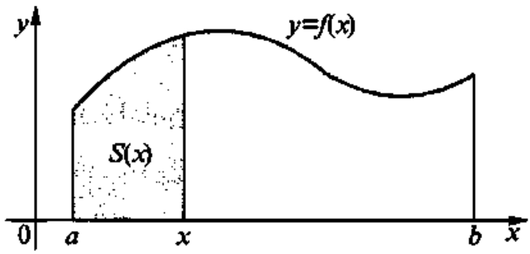

Рис. 61

Покажем, что $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, т.е. $S'(x) = f(x)$.

Рассмотрим разность $S(x + h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично).

Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием [x; $x + h$] (рис. 62). Если число h мало, то эта площадь приблизительно равна $f(x)h$, т.е. $S(x + h) - S(x) \approx f(x)h$.

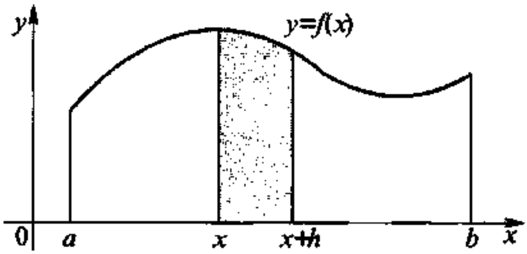

Рис. 62

Следовательно, $\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$.

Отсюда при $h \to 0$ получается равенство $S'(x) = f(x)$. Это и означает, что $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Пусть теперь $F(x)$ — произвольная первообразная для функции $f(x)$. Так как любые две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную (теорема из § 12), то

$$F(x) = S(x) + C.$$

Так как $S(a) = 0$, то при $x = a$ получаем $F(a) = C$, откуда $S(x) = F(x) - F(a)$. Из этого равенства при $x = b$ имеем

$$S(b) = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Напомним, что $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (см. рис. 61) и поэтому

$$S(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует формула (3) Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^2\,dx$.

△ Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$.

По формуле (3) получаем $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$. ▲

Этот интеграл равен площади фигуры, представленной на рисунке 59.

Задача 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

△ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формуле (3) получаем

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2. \ ▲$$

Таким образом, площадь фигуры, изображенной на рисунке 60, равна 2 (кв. ед.).

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1)\,dx$.

△ Одной из первообразных функции $x - 1$ является функция $\frac{x^2}{2} - x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ▲

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно представить в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Например, с помощью этой формулы решение задачи 3 коротко можно записать так: $\int_0^1 (x-1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_{-a}^{a}\sin x\,dx$.

Δ $\int_{-a}^{a}\sin x\,dx=(-\cos\ x)\Big|_{-a}^{a}=-\cos a+\cos(-a)=0$, так как $\cos\ (-a)=\cos a$. ▲

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

Δ Для x^p первообразная равна $\frac{x^{p+1}}{p+1}$. При $p=-\frac{1}{2}$ получаем: первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ равна $\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=2x^{\frac{1}{2}}$. По правилам нахождения первообразных для функции $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}=(2x+3)^{-\frac{1}{2}}$ первообразной является функция $\frac{1}{2}\cdot 2(2x+3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2x+3}$. Следовательно, $\int_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2x\ +\ 3}}\,dx=\sqrt{2x+3}\Big|_{-1}^{3}=\sqrt{2\cdot 3+3}-\sqrt{2(-1)+3}=2$. ▲

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Δ Для функции $\cos x$ первообразная равна $\sin x$, поэтому для функции $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ первообразной является функция

$\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}. \ \blacktriangle$$

Задача 7*. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

$$\Delta \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\left(\frac{2}{5}\cdot 32-\frac{2}{3}\cdot 8\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=7\frac{11}{15}. \ \blacktriangle$$

Упражнения

206. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:

1) $a=2,\ b=4,\ \ f(x)=x^3$;
2) $a=3,\ b=4,\ \ f(x)=x^2$;
3) $a=1,\ b=8,\ \ f(x)=\sqrt[3]{x}$;
4) $a=4,\ b=9,\ \ f(x)=\sqrt{x}$;
5) $a=-2,\ b=1,\ \ f(x)=x^2+1$;
6) $a=0,\ b=2,\ \ f(x)=x^3+1$;
7) $a=\frac{\pi}{3},\ b=\frac{2\pi}{3},\ \ f(x)=\sin x$;
8) $a=-\frac{\pi}{6},\ b=0,\ \ f(x)=\cos x$.

207. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:

1) $b=3,\ \ f(x)=x^2$;
2) $b=2,\ \ f(x)=x^3$;
3) $b=4,\ \ f(x)=\sqrt{x}$;
4) $b=8,\ \ f(x)=\sqrt[3]{x}$;
5) $b=2,\ \ f(x)=5x-x^2$;
6) $b=3,\ \ f(x)=x^2+2x$;
7) $b=1,\ \ f(x)=e^x-1$;
8) $b=2,\ \ f(x)=1-\frac{1}{x}$.

Вычислить интеграл (**208–210**).

208. 1) $\int\limits_0^1 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

209. 1) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

210. 1) $\int\limits_{-3}^{2} (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{2} (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx$; 5) $\int\limits_{1}^{2} (2x+3x^2)\,dx$; 6) $\int\limits_{-2}^{0} (9x^2-4x)\,dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{-1} (6x^2+2x-10)\,dx$; 8) $\int\limits_{0}^{2} (3x^2-4x+5)\,dx$.

211. Изобразить фигуру, площадь которой равна данному интегралу, и вычислить эту площадь:

1) $\int\limits_{-2}^{-\frac{3}{2}} (-2-3x)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{3} (6-2x)\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{4} (12+x-x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{0} (x^2-3x)\,dx$; 5) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx$; 6) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x\,dx$.

Вычислить интеграл (212–216).

212. 1) $\int\limits_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

213. 1) $\int\limits_{0}^{4} (x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{9} \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3} \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$; 5) $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\left(3-\frac{7}{x}\right)dx$; 6) $\int\limits_{1}^{8} 4\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{4}{x}\right)dx$.

214. 1) $\int\limits_{0}^{5} \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx$; 2) $\int\limits_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

215. 1) $\int\limits_{0}^{2} e^{3x}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{3} 2e^{2x}\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3}{2x-1}\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{4}{3x+2}\,dx$.

216. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$.

§ 15. Вычисление площадей с помощью интегралов

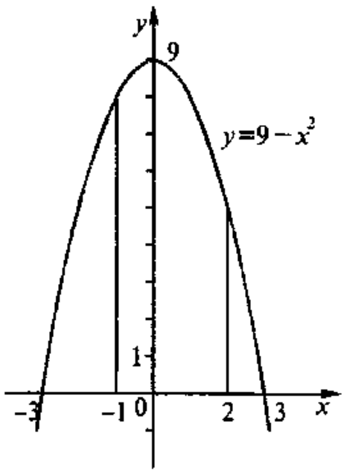

Рис. 63

Задача 1. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$ (рис. 63).

Δ Так как на отрезке $[-1; 2]$ функция $y = 9 - x^2$ принимает положительные значения, то искомая площадь S равна интегралу:

$$S = \int\limits_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим:

$$S = \int\limits_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24. \blacktriangle$$

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

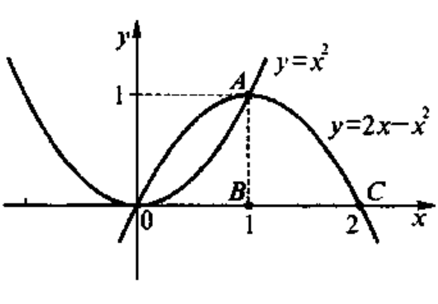

Рис. 64

Δ Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура представлена на рисунке 64. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций.

Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 (2x-x^2)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2=1. \ ▲$$

Задача 3. Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y=\cos x$ на этом отрезке.

Δ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 65), т.е. площади фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y=-\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому

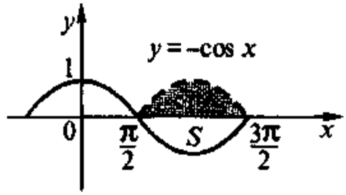

Рис. 65

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx=\left.(-\sin x)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=\left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2. \ ▲$$

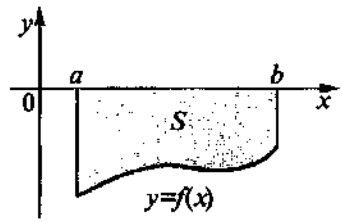

Рис. 66

Вообще если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 66), то площадь S криволинейной трапеции равна

$$S=\int_a^b (-f(x))\,dx.$$

Задача 4. Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=x+3$.

Δ Построим графики функций $y=x^2+1$ и $y=x+3$. Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2+1=$ $=x+3$. Это уравнение имеет корни $x_1=-1$, $x_2=2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 67. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух

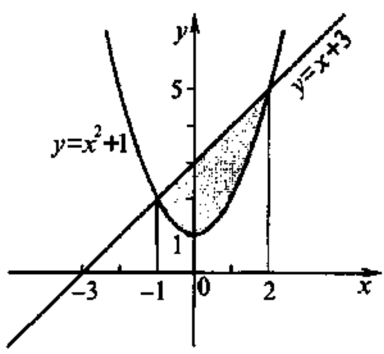

Рис. 67

трапеций, опирающихся на отрезок [−1; 2], первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как $S_1 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx$, $S_2 = \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx$, то

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2}\left((x+3)-(x^2+1)\right)dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \ \blacktriangle$$

Рассмотрим фигуру, ограниченную отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$ (рис. 68).

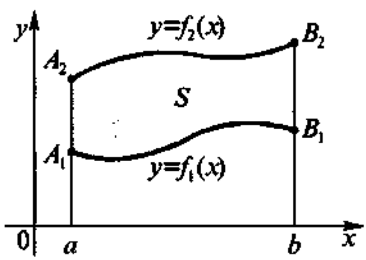

Рис. 68

Площадь S этой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b.

Площади S_2 и S_1 этих трапеций соответственно равны:

$$S_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx \ \text{ и } \ S_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Отсюда

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \qquad (1)$$

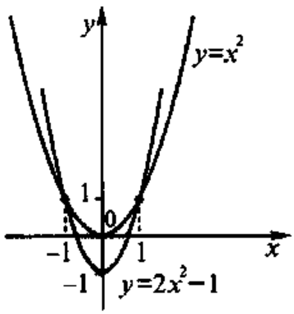

Рис. 69

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию

$$f_2(x) \geqslant f_1(x).$$

Задача 5. Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

Δ Построим данную фигуру (рис. 69) и найдем абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2 = 2x^2 - 1$.

Это уравнение имеет корни: $x_{1,2} = \pm 1$. Воспользуемся формулой (1). Здесь $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$,

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1))\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \ ▲$$

Упражнения

217. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$;
2) $y = 1 - x^2$;
3) $y = -x^2 + 3x - 2$;
4) $y = -x^2 + 4x - 3$;
5) $y = x(2 - x)$;
6) $y = -x(x + 3)$;
7) $y = (x + 2)(3 - x)$;
8) $y = (1 - x)(x + 2)$.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями (218–224).

218. 1) Параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;

2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;

3) параболой $y = 4x - x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки (4; 0) и (1; 3);

4) параболой $y = 3x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки (−3; 0) и (−1; 3);

5) параболами $y = 6x^2$, $y = (x - 3)(x - 4)$ и осью Ox;

6) параболами $y = 4 - x^2$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox.

219. 1) Графиком функции $y = \sin x$, отрезком $[0; \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки (0; 0) и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

2) графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox;

3) графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox;

4) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

220. 1) Параболой $y = 9 - x^2$, прямой $y = 7 - x$ и осью Ox;

2) параболой $y = x(4 - x)$, прямой $y = 3$ и осью Ox;

3) параболами $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$, прямой $y = 1$ и осью Ox;

4) параболами $y = (x + 2)^2$, $y = (x - 3)^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки (−1; 1) и (1; 4);

5) графиком функции $y = \sin x$, прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и отрезком $[0; \pi]$ оси Ox;

6) графиком функции $y = \cos x$, прямой $y = \frac{1}{2}$ и отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

221. 1) Параболой $y = x^2 + 3x$ и осью Ox;

2) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox;

3) графиком функции $y = \sin x$, прямыми $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{3}$ и осью Ox;

4) графиком функции $y = \cos x$, прямыми $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$ и осью Ox.

---

222. 1) Параболой $6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$;

2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$.

223. 1) Параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$;

2) параболой $y = (x + 2)^2$ и прямой $y = x + 2$;

3) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и параболой $y = x^2$;

4) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$;

5) параболой $y = 2x - x^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = x + 2$;

6) параболой $y = (x - 1)^2$ и прямой $y = 5 + x$;

7) параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = -x$;

8) прямой $y = 1$, осью Oy и графиком функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

224. 1) Параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;

2) параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;

3) параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;

4) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$ и $x = -2$;

5) прямой $y = x$ и графиком функции $y = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$;

6) параболами $y = x^2 - 2x$ и $y = -x^2$.

§ 16*. Применение интегралов для решения физических задач

1. *Задача о нахождении пути по заданной скорости.* Пусть точка движется со скоростью $v(t)$. Нужно найти путь s, пройденный точкой от момента $t = a$ до момента $t = b$. Обозначим $s(t)$ путь, пройденный точкой за время t от момента a. Тогда $s'(t) = v(t)$, т.е. $s(t)$ — первообразная для функции $v(t)$. Поэтому по формуле Ньютона — Лейбница найдем $s(b) - s(a) = \int\limits_a^b v(t)\,dt$. Так как $s(a) = 0$, то искомый путь равен:

$$s = \int\limits_a^b v(t)\,dt. \qquad (1)$$

Например, если точка движется со скоростью $v(t)=2t+1$ (м/с), то путь, пройденный точкой за первые 10 с, по формуле (1) равен

$$S=\int_0^{10}(2t+1)\,dt=(t^2+t)\Big|_0^{10}=110 \text{ (м)}.$$

2. *Задача о вычислении работы переменной силы.* Пусть тело, рассматриваемое как материальная точка, движется по оси Ox под действием силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ox. Вычислим работу силы при перемещении тела из точки $x=a$ в точку $x=b$.

Пусть $A(x)$ — работа данной силы при перемещении тела из точки a в точку x. При малом h силу F на отрезке можно считать постоянной и равной $F(x)$. Поэтому $A(x+h)-A(x)\approx F(x)h$, т.е.

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}\approx F(x).$$

Устремляя h к нулю, получаем, что $A'(x)=F(x)$, т.е. $A(x)$ — первообразная для функции $F(x)$. По формуле Ньютона — Лейбница получаем $A(b)=\int_a^b F(x)\,dx$, так как $A(a)=0$.

Итак, работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Заметим, что если F выражается в ньютонах (Н), а путь — в метрах, то работа A — в джоулях (Дж).

Задача. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

Δ По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т.е. $F=kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в м), k — постоянная. Из условия находим k. Так как при $x=0{,}01$ (м) сила $F=10$ Н, то

$$k=\frac{F}{x}=1000.$$

Следовательно, $F=kx=1000$ и по формуле (2), где $F(x)=1000x$, получаем

$$A=\int_0^{0{,}08}1000x\,dx=1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}08}=3{,}2 \text{ (Дж)}. \ ▲$$

Упражнения

225. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1, \ t_1 = 0, \ t_2 = 4;$
2) $v(t) = 2t^2 + t, \ t_1 = 1, \ t_2 = 3;$
3) $v(t) = 6t + 4, \ t_1 = 2, \ t_2 = 3;$
4) $v(t) = t^2 - t + 3, \ t_1 = 0, \ t_2 = 5.$

226. Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t) = 4t - t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

§ 17*. Простейшие дифференциальные уравнения

До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых неизвестными являлись числа. Однако в математике и ее приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Это уравнение содержит производную неизвестной функции $s(t)$. Такие *уравнения* называют *дифференциальными*.

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

Δ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т.е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем

$$y = \frac{x^2}{2} + x + C,$$

где C — произвольная постоянная. ▲

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно с точностью до постоянной. Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная однозначно определяется.

Задача 2. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Δ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 1$ находим $\sin 0 + C = 1$, откуда $C = 1$.

Ответ. $y = 1 + \sin x$. ▲

З а д а ч а 3* (*о размножении бактерий*).

Экспериментально установлено, что при определенных условиях скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству.

Пусть $m(t)$ — масса всех бактерий в момент времени t, тогда $m'(t)$ — скорость их размножения.

По условию,

$$m'(t) = km(t), \tag{1}$$

где k — заданная постоянная, зависящая от вида бактерий и внешних условий. Уравнение (1) является дифференциальным уравнением, описывающим закон размножения бактерий.

Покажем, что функции

$$m(t) = Ce^{kt}, \tag{2}$$

где C — постоянная, являются решениями уравнения (1). В самом деле, $(Ce^{kt})' = Cke^{kt} = k(Ce^{kt})$. Можно показать, что формула (2) содержит все решения уравнения (1).

Пусть известна масса m_0 бактерий в момент времени t_0, т.е.

$$m(t_0) = m_0. \tag{3}$$

Тогда из равенств (2) и (3) получаем $m_0 = Ce^{kt_0}$, откуда $C = m_0e^{-kt_0}$ и

$$m(t) = m_0e^{k(t-t_0)}$$

дает искомое решение уравнения (1) при начальном условии (3).

З а д а ч а 4* (*о радиоактивном распаде*).

Эксперименты показывают, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна имеющемуся количеству этого вещества.

Следовательно, если $m(t)$ — масса вещества в момент времени t, то

$$m'(t) = -km(t), \tag{4}$$

где k — положительная постоянная.

Знак «−» в уравнении (4) обусловлен тем, что $m(t) > 0$, а $m'(t) < 0$, так как с течением времени количество вещества уменьшается.

Как и для уравнения (1), проверяется, что функции

$$m(t) = Ce^{-kt} \tag{5}$$

являются решениями уравнения (4).

Если задано начальное условие

$$m(t_0) = m_0, \tag{6}$$

то из равенств (5) и (6) имеем $C = m_0 e^{kt_0}$. Следовательно, функция

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)} \tag{7}$$

является решением дифференциального уравнения (4) при начальном условии (6).

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т.е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (7) при $t = t_0 + T$ находим $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, $kT = \ln 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$.

Подставляя найденное значение k в формулу (7), получаем

$$m(t) = m_0 e^{\frac{-t+t_0}{T}\ln 2} \quad \text{или} \quad m(t) = m_0 2^{\frac{-t+t_0}{T}}.$$

В частности, если $t_0 = 0$, то $m(t) = m_0 2^{\frac{-t}{T}}$.

Задача 5* (*гармонические колебания*).

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т.д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т.п. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \tag{8}$$

где ω — заданное положительное число.

Решениями уравнения (8) являются функции

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \tag{9}$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (8) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*, а равенство (9) называют *уравнением гармонических колебаний*.

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.

Графиком гармонического колебания является синусоида.

Упражнения

Решить дифференциальное уравнение (227–228).

227. 1) $y' = 3 - 4x$; 3) $y' = 3e^{2x}$;
2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$; 4) $y' = 4\cos 2x$.

228. 1) $y' = 3\sin x$; 3) $y' = 4x^3 - 2\cos x$;
2) $y' = \cos x - \sin x$; 4) $y' = 3x^2 - 4e^{2x}$.

229. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x$; $y(0) = 0$; 4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
2) $y' = 2\cos x$; $y(\pi) = 1$; 5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$; 6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

230. Показать, что функция $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

Упражнения к главе II

231. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \cos x$, $M(0; -2)$; 4) $f(x) = e^x$, $M(0; 2)$;
2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi; 0)$; 5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1; -2)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 5)$; 6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2; 3)$.

232. Вычислить интеграл:

1) $\int_{-1}^{2} 2\,dx$; 2) $\int_{-2}^{2} (3 - x)\,dx$; 3) $\int_{1}^{3} (x^2 - 2x)\,dx$; 4) $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2)\,dx$;

5) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; 6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; 8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

233. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

2) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;

3) $y = x^2$, $y = 2 - x$;

4) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x + 1{,}5$;

5) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = -8$, $x = -1$, $y = 0$;

6) $y = \frac{1}{x^3}$, $x = -3$, $x = -1$, $y = 0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Показать, что $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ на всей числовой прямой.

2. Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$.

3. Вычислить: $\int\limits_1^2 3x^3\,dx$; $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2}$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox.

Вычислить интеграл (234–235).

234. 1) $\int\limits_0^1 (5x^4 - 8x^3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 (6x^3 - 5x)\,dx$; 3) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx$;

4) $\int\limits_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx$; 5) $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int\limits_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

235. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$; 3) $\int\limits_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$; 4) $\int\limits_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (236–237).

236. 1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $x = 1$, $y = 0$; 3) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$; 4) $y = x^2 + 2$, $y = 2x + 2$.

237. 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 + 4x + 4$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$;

3) $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

238*. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x = 1$;

2) гиперболой $y=\frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x=2$, и прямыми $y=0$, $x=6$.

239*. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^3-3x^2-9x+1$, $x=0$, $y=6$, $x=-1$;

2) $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

240*. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+px$, где p — заданное число, и прямой $y=kx+1$, наименьшая?

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Несмотря на то, что интегральное исчисление появилось в XVII в., его истоки можно обнаружить в глубокой древности. Так, в Московском папирусе, написанном около 40 веков тому назад, описывается алгоритм вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями. Возникают проблемы нахождения общих приемов вычисления площадей криволинейных фигур и объемов различных тел.

В Древнем Египте математика носила прикладной характер и при вычислении площадей и объемов египтяне удовлетворялись приближенными значениями. Метод древнегреческого ученого *Евдокса Книдского*, жившего в IV в. до н. э., названный впоследствии *методом исчерпывания*, позволял достаточно точно вычислять площади любых фигур на основе неявного использования предельных переходов. Суть этого метода, например для вычисления площадей плоских фигур, заключается в следующем. В фигуру вписываются и вокруг нее описываются многоугольники, число сторон которых увеличивается. Находится предел, к которому стремятся площади этих многоугольников; его и принимают за площадь рассматриваемой фигуры. Сложность применения этого метода в том, что для каждой фигуры надо было искать *свой* способ вычисления предела. В древности этим методом пользовались *Архимед* и *Евклид*, но вплоть до XX в. в ряде учебников с помощью метода исчерпывания обосновывались выводы формул вычисления площадей и объемов геометрических фигур. В дальнейшем развитие методов, которые применяли древнегреческие ученые при вычислении площадей и объемов, привело к понятию интеграла.

В XVII в. немецкий математик и астроном *И. Кеплер* во время открытия законов движения планет одним из первых попытался возродить метод вычисления площадей и объемов, идущий от

Евдокса и развитый Архимедом. Кеплер вычислял площади плоских фигур и объемы тел, основываясь на идее разбиения фигур и тел на бесконечное число малых частей, которые он называл «тончайшими кружочками» или «частями крайне малой ширины». Затем суммировал площади (или объемы) полученных при разбиении фигур (тел).

В отличие от Кеплера, итальянский математик *Б. Кавальери* (1598–1647) в книге «Геометрия неделимых», деля фигуру (тело) параллельными прямыми (плоскостями), считал эти линии (плоскости) лишенными всякой толщины, однако «складывал» их для нахождения площади фигуры (объема тела). Под понятием «все линии» Кавальери понимал то же, что мы сегодня понимаем под $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Труды Кеплера, Кавальери и других ученых послужили основой, на которой *Ньютон* и *Лейбниц* выстроили теорию интегрального исчисления. Развитие этой теории продолжили *Эйлер* и в России — *П.Л. Чебышев* (1821–1894). В частности, Чебышев разработал способы интегрирования отдельных классов иррациональных функций.

Определение интеграла как предела интегральных сумм принадлежит *О. Коши*. Символ $\int f(x)dx$ ввел *Лейбниц*. Термин «интеграл» (от лат. *integer* — целый) впервые был предложен *И. Бернулли*.

§ 18. Определение комплексных чисел

Решение многих задач математики, физики и практики сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики. Стремление сделать уравнения разрешимыми — одна из главных причин расширения понятия числа.

Так, для разрешимости уравнений вида $x + a = b$ положительных чисел недостаточно. Например, уравнение $x + 5 = 2$ не имеет положительных корней. Поэтому приходится вводить отрицательные числа и нуль.

Для того чтобы уравнения вида $ax = b$ $(a \neq 0)$ имели корни, целых чисел недостаточно. Например, уравнение $2x = 3$ не имеет целых корней. Поэтому приходится вводить дробные числа. Целые и дробные числа образуют множество рациональных чисел. Говорят, что множество рациональных чисел является расширением множества целых чисел.

На множестве рациональных чисел разрешимы алгебраические уравнения первой степени, т.е. уравнения вида $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$. Однако алгебраические уравнения степени выше первой могут не иметь рациональных корней. Например, такими являются уравнения $x^2 = 2$, $x^3 = 5$. Необходимость решения таких уравнений явилась одной из причин введения иррациональных чисел. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Множество действительных чисел является расширением множества рациональных чисел.

Однако и действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Простейшее из них — уравнение $x^2 + 1 = 0$. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными числами образуют множество, которое называют множеством *комплексных чисел*.

Выясним предварительно, какой вид должны иметь комплексные числа. Будем считать, что на множестве комплексных чисел уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень. Обозначим этот корень буквой i. Таким образом, i — это комплексное число, такое, что $i^2 = -1$.

Как и для действительных чисел, нужно ввести операции сложения и умножения комплексных чисел так, чтобы их сумма и произведение были бы комплексными числами. Тогда, в частности, для любых действительных чисел a и b выражение $a + bi$ должно быть комплексным числом. Если потребовать, чтобы операции сложения и умножения комплексных чисел обладали обычными свойствами: переместительным свойством, сочетательным и т.д., то выражение $a + bi$ можно считать записью комплексного числа в общем виде. Название «комплексное» происходит от слова «составное» — по виду выражения $a + bi$.

Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ такой, что $i^2 = -1$.

Число a называется действительной частью комплексного числа $a + bi$, а число b — его мнимой частью. Число i называется мнимой единицей.

Например, действительная часть комплексного числа $2 + 3i$ равна 2, а мнимая — равна 3; для комплексного числа $(-2) + (-3)i$, которое также будем записывать в виде $-2 - 3i$, действительная часть равна -2, а мнимая часть равна -3.

Заметим, что для строгого определения комплексных чисел надо для этих чисел ввести понятие равенства и операции сложения и умножения.

Введем понятие равенства комплексных чисел.

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, т.е. когда равны их действительные и мнимые части.

Например, $\frac{4}{6} + \sqrt{4}i = \frac{2}{3} + 2i$, так как $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{4} = 2$.

Задача. Найти действительные числа x и y из равенства $(2x + y) + (x - y)i = 5 - 2i$.

Δ По определению равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 1$, $y = 3$. ▲

Упражнения

241. (*Устно.*) Назвать действительную и мнимую части комплексного числа:

1) $6 + 5i$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$; 3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i$; 4) $\sqrt[3]{2} - 2i$;

5) $-\pi - 6i$; 6) $-\frac{1}{4} + \sqrt{5}\,i$.

242. Записать комплексное число, у которого действительная и мнимая части соответственно равны:

1) 3 и 4; 2) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$; 3) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt{3}$ и -2;

5) $-0{,}5$ и $\sqrt{5}$; 6) $-\frac{2}{7}$ и -3.

243. Указать, какие из данных комплексных чисел равны:

$-0{,}5+\sqrt{4}i$, $3-2i$, $-\frac{1}{2}+2i$, $\sqrt{9}-4i$,

$\sqrt{9}-\sqrt[3]{8}i$, $\sqrt[3]{27}-\sqrt{16}\,i$, $\sqrt[3]{27}-\sqrt{4}i$.

244. При каком значении x действительная часть комплексного числа равна нулю:

1) $(x+3)+4i$;
2) $(x-5)+2i$;
3) $(2x+4)+i$;
4) $(3x-9)+5i$?

245. Найти значение x, при котором мнимая часть комплексного числа равна нулю:

1) $2+(x-2)i$
2) $-4+(x+3)i$;
3) $-1+(2x-1)i$;
4) $1+(3x+1)i$.

---

246. Найти действительные числа x и y, если:

1) $6x+3yi=4+2i$;
2) $x-3yi=-5-\sqrt{2}i$;
3) $x-(4-y)i=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$;
4) $x-(x+y)i=3+2i$;
5) $(x+y)+(x-y)i=8+2i$;
6) $(2x+y)+(x-y)i=18+3i$.

§ 19. Сложение и умножение комплексных чисел

Операции сложения и умножения комплексных чисел определяются следующим образом:

***Суммой** двух комплексных чисел* $a+bi$ и $c+di$ *называется комплексное число* $(a+c)+(b+d)i$, т.е.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \qquad (1)$$

***Произведением** двух комплексных чисел* $a+bi$ и $c+di$ *называется комплексное число* $(ac-bd)+(ad+bc)i$, т.е.

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами. Поэтому нет необходимости запоминать формулы (1) и (2), их можно получить по обычным правилам алгебры, считая, что $i^2=-1$.

Например, $(a+bi)+(c+di)= a+bi+c+di=a+c+bi+di=$ $=(a+c)+(b+d)i$.

Формулу (2) можно получить следующим образом: $(a+bi)(c+di)=$ $=ac+bdi^2+adi+bci =(ac+bdi^2)+(ad+bc)i=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Задача 1. Найти произведение $(2+3i)(1+2i)$.

Δ $(2+3i)(1+2i)=2\cdot 1+2\cdot 2i+3i\cdot 1+3i\cdot 2i=2+6i^2+7i=$ $=-4+7i$. ▲

Принято считать, что

$$a+0\cdot i=a,$$

т.е. комплексное число $a+0i$ является действительным числом a.

Например, $2+0i=2$, $-\frac{1}{3}+0i=-\frac{1}{3}$.

Число вида $0+bi$ обозначают bi, т.е.

$$0+bi=bi;$$

его называют чисто мнимым числом.

Например, числа $0+3i=3i$, $0-\frac{1}{2}i=-\frac{1}{2}i$ чисто мнимые. В частности, полагают

$$0+1\cdot i=1\cdot i=i, \qquad 0+0\cdot i=0\cdot i=0.$$

Комплексное число $0+0i=0$ является единственным числом, которое одновременно и действительное и чисто мнимое.

Комплексное число принято обозначать одной буквой, чаще всего буквой z. Запись $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z.

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают такими же свойствами, как и для действительных чисел. Перечислим основные из этих свойств:

1. *Переместительное свойство:*

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \qquad z_1z_2=z_2z_1.$$

2. *Сочетательное свойство:*

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \qquad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

3. *Распределительное свойство:*

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Докажем, например, переместительное свойство сложения. Подробная формулировка его такова: для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $z_1+z_2=z_2+z_1$.

○ Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. По определению сложения комплексных чисел, т.е. по формуле (1), имеем:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i,$$
$$z_2+z_1=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\,i.$$

Так как для действительных чисел справедливы равенства $a_1+a_2=a_2+a_1$, $b_1+b_2=b_2+b_1$, то по правилу равенства комплексных чисел $z_1+z_2=z_2+z_1$. ●

Аналогично доказываются остальные свойства 2—3.

Отметим, что числа $0=0+0i$ и $1=1+0i$ на множестве комплексных чисел обладают такими же свойствами, что и на множестве действительных чисел, а именно: для любого комплексного числа z справедливы равенства

$$z+0=z, \qquad z\cdot 1=z.$$

Задача 2. Выполнить действия: $\frac{1}{3}i+2i(-3+4i)-5+\frac{2}{3}i.$

△ $\frac{1}{3}i+2i(-3+4i)-5+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}i-5+2i(-3)+2i(4i)=i-5-6i+$ $+8i^2=-5-5i+8(-1)=-13-5i.$ ▲

Комплексное число $(-1)z$ называется *противоположным* комплексному числу z и обозначается $-z$. Если $z=a+bi$, то $-z=-a-bi$. Например, $-(3-5i)=-3+5i$.

Для любого комплексного числа z выполняется равенство

$$z+(-z)=0.$$

Упражнения

247. Найти сумму комплексных чисел:

1) $(3+i)+(2+3i)$;
2) $(3-5i)+(2+i)$;
3) $(1+3i)+(-3+i)$;
4) $(-4+3i)+(4-3i)$;
5) $(1+i)+(-1-i)$;
6) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)$;
7) $(-1{,}2-1{,}5i)+(-2{,}8-3{,}5i)$;
8) $(\sqrt{3}-2i)+(\sqrt{3}+5i)$.

248. Найти произведение комплексных чисел:

1) $(3+5i)+(2+3i)$;
2) $(4+7i)+(2-i)$;
3) $(5-3i)+(2-5i)$;
4) $(-3+2i)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$;
5) $\left(-\frac{1}{2}-3i\right)\left(\frac{5}{2}+i\right)$;
6) $(-5+\sqrt{2}i)(-6-3\sqrt{2}i)$.

249. Выполнить действия:

1) $2i + 3 + 4i(1 - i)$;
2) $(1 + i)(-1 + 2i) + 1 - 3i$;
3) $3i(1 - i) + 2i(1 + i)$;
4) $\frac{1}{2}i(4+2i)+\frac{1}{3}i(3-9i)$;
5) $(3 - 2i)(4 + i) + 10i$;
6) $6 + (5 - i)(1 + i)$.

250. Выполнить действия:

1) $(2 - 3i) + (-3 + 3i)$;
2) $(5 + 4i) - (-3 + 4i)$;
3) $(7 - 5i) + (-7 + 4i)$;
4) $(4 + 2i) - (-1 + 2i)$;
5) $(3 - i)(3 + i)$;
6) $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$.

---

251. Упростить выражение (a, b — действительные числа):

1) $(a + 2bi) + (a - 3bi)$;
2) $(4a + 5bi) + (-3a - 5bi)$;
3) $(a + bi)(a - bi)$;
4) $(2a + 3bi)(2a - 3bi)$;
5) $(2a + 3bi)(3b + 2ai)$;
6) $(4b + 5ai)(5a + 4bi)$.

252. Записать число, противоположное данному числу:

1) $3 + 2i$; 2) $7 - 5i$; 3) $-2 + i$; 4) $-\sqrt{3} - 2i$.

253. Найти действительные числа x и y из равенства:

1) $(x + 3iy) + (2y - 3ix) = 1 + 2i$; 2) $(x + 2iy)(y - 2ix) = 2 - 3i$.

§ 20. Модуль комплексного числа

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. *Сопряженным* с z называется комплексное число $a - bi$, которое обозначается $\overline{z}$, т.е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Например, $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$, $\overline{-2 - 5i} = -2 + 5i$, $\overline{i} = -i$.

Отметим, что $\overline{a - bi} = a + bi$, поэтому для любого комплексного числа z имеет место равенство

$$(\overline{\overline{z}}) = z.$$

Задача 1. Доказать, что равенство $\overline{z} = z$ справедливо тогда и только тогда, когда z — действительное число.

Δ Пусть $z = a + bi$. Тогда $\overline{z} = a - bi$ и равенство $a + bi = a - bi$ по определению равенства комплексных чисел справедливо тогда и только тогда, когда $b = -b$, т.е. $b = 0$. А это и означает, что $z = a + bi = a + 0i = a$ — действительное число. ▲

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$ и обозначается $|z|$, т.е.

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (1)$$

Например, $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$.

Из формулы (1) следует, что $|z|\geqslant 0$ для любого комплексного числа z, причем $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$, т.е. когда $a=0$ и $b=0$. Докажем, что для любого комплексного числа z справедливы формулы:

$$|z|=|\bar{z}|, \tag{2}$$

$$z\bar{z}=|z|^2. \tag{3}$$

○ Пусть $z=a+bi$. Тогда $\bar{z}=a-bi$ и по определению модуля

$|\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$.

Найдем произведение: $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=$ $=|z|^2$. ●

Упражнения

254. Записать комплексное число, сопряженное с данным числом:
1) $1+i$; 2) $2+3i$; 3) $-3+4i$; 4) $-7-5i$;
5) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$; 6) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i$.

255. Найти модуль комплексного числа:
1) $3-4i$; 2) $-8-6i$; 3) $-1+i$; 4) $1-i$; 5) $-3i$;
6) $4i$; 7) $\sqrt{5}+2i$; 8) $1-\sqrt{3}i$; 9) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$; 10) $-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i$.

---

256. Доказать равенство $|z_1 z_2|=|z_1|\,|z_2|$.

257. Разложить число z на комплексно-сопряженные множители (a и b — действительные числа):
1) $z=a^2+4b^2$; 3) $z=8a^2+16b^2$;
2) $z=9a^2+25b^2$; 4) $z=81a^2+5b^2$.

§ 21. Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание комплексных чисел вводится как операция, обратная сложению: для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z такое, что

$$z+z_2=z_1, \tag{1}$$

т.е. уравнение (1) имеет только один корень.

○ Прибавим к обеим частям равенства (1) число $(-z_2)$, противоположное числу z_2:

$$z + z_2 + (-z_2) = z_1 + (-z_2), \text{ откуда } z = z_1 + (-z_2). \bullet$$

Число $z = z_1 + (-z_2)$ обычно обозначают так: $z = z_1 - z_2$ — и называют *разностью* чисел z_1 и z_2.

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то разность $z_1 - z_2$ имеет следующий вид:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \quad (2)$$

Формула (2) показывает, что разность комплексных чисел можно находить по правилам действий с многочленами:

$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i = a_1 - a_2 + b_1 i - b_2 i =$
$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$

Задача 1. Найти разность $(5 + 4i) - (-3 + 2i)$.

Δ $(5 + 4i) - (-3 + 2i) = 5 + 4i + 3 - 2i = 8 + 2i$. ▲

Деление комплексных чисел вводится как операция, обратная умножению: для любых комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ существует, и притом только одно, число z такое, что

$$zz_2 = z_1, \quad (3)$$

т.е. уравнение (3) имеет только один корень. Это число z называется *частным* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 : z_2$, или $\frac{z_1}{z_2}$, т.е. $z = z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2}$.

Комплексное число нельзя делить на нуль.

Докажем, что уравнение (3) для любых комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ имеет только один корень, и найдем этот корень.

○ Умножив обе части уравнения (3) на $\bar{z}_2$, получим $zz_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_2$, т.е.

$$z\,|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2. \quad (4)$$

Уравнение (4) равносильно уравнению (3), так как $z_2 \neq 0$, и поэтому $\bar{z}_2 \neq 0$. Умножим обе части уравнения (4) на действительное число $\frac{1}{|z_2|^2}$ (заметим, что $|z_2|^2 \neq 0$, так как $z_2 \neq 0$), получим $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$. ●

Итак, частное комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ можно найти по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \quad (5)$$

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то формулу (5) можно представить в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Эту формулу можно не запоминать, достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на число, сопряженное со знаменателем.

Например,

$$\frac{1+2i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+4i+6i^2}{4+9} = \frac{-4+7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13} i.$$

Задача 2. Вычислить $\frac{(3-4i)(1-i)}{4+3i} + \frac{1}{i}$.

Δ $\frac{(3-4i)(1-i)}{4+3i} + \frac{1}{i} = \frac{3-3i-4i+4i^2}{4+3i} + \frac{1}{i} = \frac{(-1-7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} + \frac{(-i)}{i(-i)} =$

$= \frac{-4+3i-28i+21i^2}{16+9} - i = \frac{-25-25i}{25} - i = -1 - i - i = -1 - 2i.$ ▲

Задача 3. Вычислить $\left(\frac{1-i^5}{1-i^3}\right)^3$.

Δ $i^3 = i^2 i = -i$, $i^5 = i^3 \cdot i^2 = -i(-1) = i$,

$$\left(\frac{1-i^5}{1-i^3}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{2}\right)^3 = \left(\frac{-2i}{2}\right)^3 = i.$$ ▲

Упражнения

258. Найти разность комплексных чисел:

1) $(2+3i) - (3+i)$;
2) $(3-5i) - (2+i)$;
3) $(1+3i) - (-3+i)$;
4) $(4+3i) - (4-3i)$;
5) $(4+i) - (-5+i)$;
6) $(7+2i) - (3+2i)$;
7) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i) - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}i)$;
8) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}i) - (\sqrt{5} - 4\sqrt{3}i)$.

259. Вычислить:

1) $(3-4i) - (2+3i) + (1-i)$;
2) $(4-2i) - (1+i) + (2-3i)$;
3) $(5+7i) - (2+3i) - (4+i)$;
4 $(3-5i) - (2-i) - (1+4i)$.

260. Решить уравнение:

1) $(2+3i) + z = -4 + i$;
2) $(-1+2i) + z = 5 - \frac{1}{2} i$;
3) $(\sqrt{2} + i) - z = 4 + \sqrt{2} i$;
4) $6 - i = z + (5 - \sqrt{2})i$.

261. Найти частное двух комплексных чисел:

1) $\frac{1+i}{1-i}$; 2) $\frac{-1-i}{-1+i}$; 3) $\frac{3-4i}{2+i}$; 4) $\frac{2+3i}{2-3i}$;

5) $\frac{1+2i}{3-2i}$; 6) $\frac{5-4i}{-3+2i}$; 7) $\frac{-7+2i}{5-4i}$; 8) $\frac{-5-3i}{-7-2i}$.

262. Вычислить:

1) $\frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$; 2) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; 3) $\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$;

4) $\frac{2-3i}{(1-i)\ (3+i)}$; 5) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$; 6) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$;

7) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$; 8) $\frac{2-3i}{2+i}+\frac{2+3i}{2-i}$.

---

263. Решить уравнение:

1) $z(2+i)=3-i$; 3) $z(1+i)-i=4$;

2) $z(1-2i)=2+5i$; 4) $z(1-i)+3=i$.

264. Вычислить:

1) $(3+2i)^2$; 2) $(2-i)^3$; 3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; 4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$;

5) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; 6) $(3+4i)^2+(3-4i)^2$.

265. Доказать равенство $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$.

266*. Доказать, что для любого комплексного числа z его действительная часть равна $\frac{z+\bar{z}}{2}$, а мнимая часть равна $\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

267. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство:

1) $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; 2) $\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

§ 22. Геометрическая интерпретация комплексного числа

1. Комплексная плоскость

Действительные числа геометрически изображаются точками числовой прямой. Комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как пару действительных чисел $(a; b)$. Поэтому естественно комплексные числа изображать точками плоскости.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами $(a; b)$, и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 70).

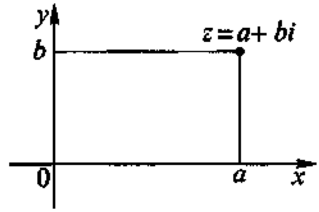

Рис. 70

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости взаимно однозначно: каждому комплексному числу $a + bi$ соответствует одна точка плоскости с координатами $(a; b)$ и, наоборот, каждой точке плоскости с координатами $(a; b)$ соответствует одно комплексное число $a + bi$. Поэтому слова «*комплексное число*» и «*точка плоскости*» часто употребляются как синонимы. Так, вместо слов «точка, изображающая число $1 + i$» говорят коротко: «точка $1 + i$». Можно, например, говорить: «Треугольник с вершинами в точках i, $1 + i$, $-i$».

При такой интерпретации действительные числа a, т.е. комплексные числа $a + 0i$, изображаются точками с координатами $(a; 0)$, т.е. точками оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*. Чисто мнимые числа $bi = 0 + bi$ изображаются точками с координатами $(0; b)$, т.е. точками оси ординат, поэтому ось ординат называют *мнимой осью*. При этом точка с координатами $(0; b)$ обозначается bi. Например, точка $(0; 1)$ обозначается i, точка $(0; -1)$ — это точка $-i$, точка $(0; 2)$ — это точка $2i$ (рис. 71). Начало координат — это точка 0. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0 (начала координат), а точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси (рис. 72).

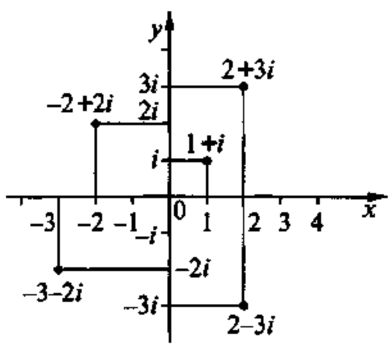

Рис. 71

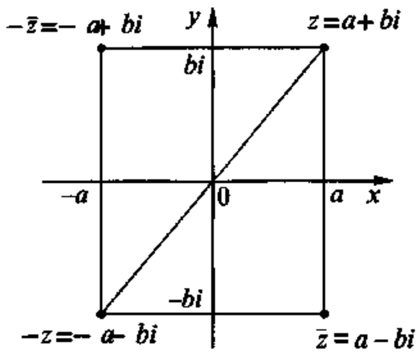

Рис. 72

○ Пусть $z = a + bi$. Тогда $-z = -a - bi$, $\bar{z} = a - bi$. Точки z и $-z$ имеют координаты соответственно $(a; b)$ и $(-a; -b)$; следовательно, они симметричны относительно начала координат. Точка $\bar{z}$ имеет координаты $(a; -b)$; следовательно, она симметрична с точкой z относительно действительной оси (см. рис. 72). ●

2. Геометрический смысл модуля комплексного числа

Выясним геометрический смысл $|z|$.

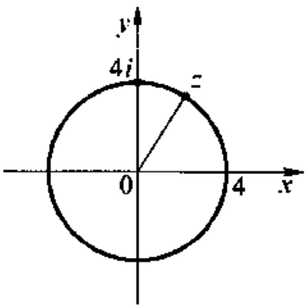

Рис. 73

Пусть $z = a + bi$. Тогда, по определению модуля, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Это означает, что $|z|$ — расстояние от точки 0 до точки z (рис. 72).

Например, равенство $|z| = 4$ означает, что расстояние от точки 0 до точки z равно 4 (рис. 73). Поэтому множество всех точек z, удовлетворяющих равенству $|z| = 4$, является окружностью с центром в точке 0 радиуса 4. Уравнение $|z| = R$ называют уравнением окружности с центром в точке 0 радиуса R. Здесь R — заданное положительное число.

3. Геометрический смысл модуля разности комплексных чисел

Выясним геометрический смысл $|z_1 - z_2|$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$.

Из курса геометрии известно, что это число равно расстоянию между точками с координатами $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$.

Итак, $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Например, расстояние между точками 1 и $-3 + 3i$ равно

$$|1-(-3+3i)| = |4-3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Покажем, что $|z - z_0| = R$ — уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R.

Здесь z_0 — заданное комплексное число, R — заданное положительное число.

○ Так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0, то множество всех точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$, — это множество всех точек, расстояние от которых до точки z_0 равно R. ●

Например, $|z+i|=2$ — уравнение окружности с центром в точке $-i$ радиуса 2, так как данное уравнение можно записать в виде $|z-(-i)|=2$ (рис. 74).

Задача 1. Пусть z_1, z_2 — разные точки комплексной плоскости. Доказать, что $|z-z_1|=|z-z_2|$ — уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проходящей через его середину.

Δ Так как $|z-z_1|$ — расстояние от точки z до точки z_1, а $|z-z_2|$ — расстояние от точки z до точки z_2, то множество всех точек, удовлетворяющих уравнению $|z-z_1|=|z-z_2|$, — это множество всех точек, равноудаленных от двух точек z_1 и z_2. ▲

Например, $|z-2i|=|z-1|$ — уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки $2i$ и 1, и проходящей через его середину (рис. 75).

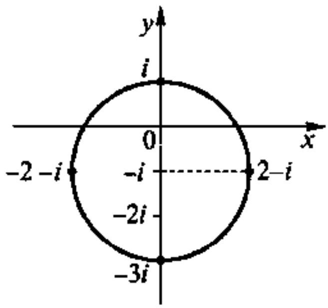

Рис. 74

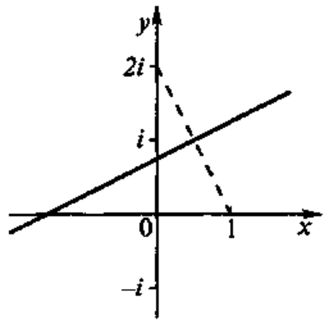

Рис. 75

Упражнения

268. На комплексной плоскости построить точки:

1) 2; 2) 5; 3) -3; 4) $2i$; 5) $5i$;

6) $-3i$; 7) $1+2i$; 8) $3+2i$; 9) $-2+i$; 10) $-1+i$;

11) $-1-2i$; 12) $-3-i$; 13) $1-3i$; 14) $2-2i$.

---

269. Построить окружность:

1) $|z|=2$; 2) $|z|=4$.

270. Решить уравнение:

1) $z+2\bar{z}=3+i$; 2) $3z-\bar{z}=-4+2i$.

§ 23. Тригонометрическая форма комплексного числа

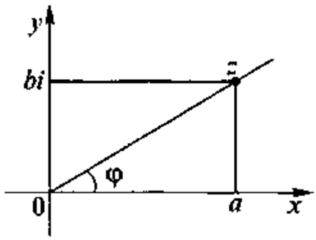

Рис. 76

Рассмотрим на комплексной плоскости точку $z = a + bi$, отличную от нуля (рис. 76). Пусть луч Oz получается в результате поворота положительного луча Ox оси абсцисс на угол φ радиан. Тогда $a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$.

Поэтому число z можно записать так:

$$z = |z|\cos\varphi + i\,|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Обозначим $|z|$ буквой r. Тогда получим

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде (1) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

В этой записи $r = |z|$ — модуль комплексного числа. Число φ называют *аргументом комплексного числа*. Заметим, что аргумент определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Итак, любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в тригонометрической форме. Для числа 0 понятия аргумента и тригонометрической формы не определяются.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, называется *алгебраической формой* этого числа.

Если $z = a + bi$, то $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ и равенство (1) можно записать в виде

$$a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi + i\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi,$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Таким образом, если φ — аргумент комплексного числа $a + bi$, то справедливы равенства (2). Верно и обратное утверждение: если φ — такое число, что выполняются оба равенства (2), то φ — аргумент комплексного числа $a + bi$.

Например, для комплексного числа $1 + i$ имеем $a = 1$, $b = 1$ и равенства (2) принимают вид $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Этим двум равенствам удовлетворяют числа $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, и только они. Каждое из них является аргументом числа $1 + i$ (рис. 77). Число

$k \in \boldsymbol{Z}$ часто выбирается таким, чтобы аргумент φ был заключен в пределах от 0 до 2π. Таким аргументом числа $1 + i$ является $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

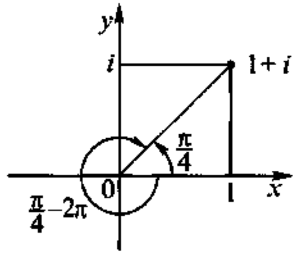

Рис. 77

Для нахождения аргумента обычно пользуются не формулами (2), а более простой формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \qquad (3)$$

которая получается почленным делением второго из равенств (2) на первое.

Если φ — аргумент числа $a + bi$, т.е. выполняются равенства (2), то выполняется и равенство (3). Однако не все значения φ, удовлетворяющие равенству (3), являются аргументами числа $a + bi$. Поэтому при нахождении аргумента числа $a + bi$ с помощью формулы (3) еще нужно учесть, в какой четверти расположена точка $a + bi$.

Задача 1. Найти все аргументы числа $-1+i\sqrt{3}$ и записать это число в тригонометрической форме.

Δ По формуле (3)

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}. \qquad (4)$$

Так как действительная часть числа $-1+i\sqrt{3}$ отрицательна, а мнимая часть положительна, то это число лежит во второй четверти и поэтому угол φ также лежит во второй четверти. Учитывая это, из равенства (4) находим

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Для записи числа $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме найдем его модуль: $|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Следовательно,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \ \blacktriangle$$

Задача 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

$$\Delta \ r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2+2} = 2, \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1.$$

Точка $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ расположена в третьей четверти, поэтому угол φ также лежит в третьей четверти. Учитывая это, из равенства $\operatorname{tg}\varphi = 1$ находим:

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad \text{где } k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. ▲

Действительное число является частным случаем комплексного числа $z = a + bi$ при $b = 0$, поэтому его также можно записать в тригонометрической форме. Например:

$$3 = 3\,(\cos 0 + i\sin 0), \quad -4 = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Аналогично записываются в тригонометрической форме чисто мнимые числа. Например:

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Отметим, что при записи комплексного числа в тригонометрической форме косинус и синус берутся от одного и того же угла φ, равного аргументу числа z, а между косинусом и синусом стоит знак «+».

Упражнения

271. Записать в алгебраической форме комплексное число:

1) $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$;

2) $4\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$;

3) $2\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$;

4) $6\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$.

272. Найти все аргументы комплексного числа и записать это число в тригонометрической форме:

1) 1; 2) 2; 3) -1; 4) -3; 5) i; 6) $3i$; 7) $-i$;

8) $-2i$; 9) $-1-i$; 10) $\sqrt{3}-i$; 11) $-\sqrt{3}+i$; 12) $2-2i$.

273. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$;

2) $3\left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)$;

3) $-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$;

4) $2\left(-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

§ 24. Свойства модуля и аргумента комплексного числа

С помощью тригонометрической формы удобно находить произведение и частное комплексных чисел.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Таким образом, произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно находить по формуле

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (1)$$

Например, $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из формулы (1) следует, что *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Например, если $\frac{\pi}{5}$ — аргумент числа z_1, $-\frac{\pi}{30}$ — аргумент числа z_2, то $\frac{\pi}{5}+\left(-\frac{\pi}{30}\right)=\frac{\pi}{6}$ — аргумент числа z_1z_2.

Покажем, что частное двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно находить по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (2)$$

○ Заметим сначала, что

$$\frac{1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2).$$

Используя формулу (1), получаем

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) =$$
$$= \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

откуда следует формула (2). ●

Например,

$$\frac{\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}} = \cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{30}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{30}\right)= \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Заметим, что из формулы (1) следуют формулы

$$z^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$z^3 = z^2 z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\; r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Вообще для любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ и любого натурального (и даже целого) числа n справедлива формула

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (3)$$

которую называют *формулой Муавра*.

Задача. Вычислить $(\sqrt{3}+i)^6$.

Δ Запишем число $\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

По формуле Муавра находим $(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$. ▲

Упражнения

Выполнить действия и записать результат в алгебраической форме (274–276).

274. 1) $4\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$;

3) $(\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

4) $(1+i)\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

275. 1) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}}$; 3) $\dfrac{1+i}{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$;

2) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}}$; 4) $\dfrac{i}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$.

276. 1) $(1-i)^8$; 2) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^4}$; 3) $(1-i\sqrt{3})^5$; 4) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$.

277. Доказать, что если φ — аргумент числа z, то:

1) $-\varphi$ — аргумент числа $\frac{1}{z}$; 2) $-\varphi$ — аргумент числа $\bar{z}$.

278. Доказать равенство (n — натуральное число)

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

§ 25. Квадратное уравнение с комплексным неизвестным

Рассмотрим уравнение $z^2=a$, где a — заданное действительное число, z — неизвестное.

Это уравнение:

1) имеет один корень: $z=0$, если $a=0$;

2) имеет два действительных корня: $z_{1,2}=\pm\sqrt{a}$, если $a>0$;

3) не имеет действительных корней, если $a<0$.

Например, уравнение

$$z^2=-1 \qquad (1)$$

не имеет действительных корней.

Покажем, что уравнение (1) имеет два комплексных корня, и найдем их.

○ Подставляя в уравнение (1) вместо -1 число i^2, получаем $z^2=i^2$, откуда $z^2-i^2=0$.

Применяя формулу разности квадратов, разложим левую часть последнего уравнения на множители: $(z-i)(z+i)=0$. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $z_1=i$, $z_2=-i$.

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $z_{1,2}=\pm i$. ●

Аналогично покажем, что уравнение

$$z^2=a \qquad (2)$$

при $a<0$ также имеет два комплексных корня, и найдем их.

○ Запишем число a в виде $a=(-1)(-a)=i^2|a|=i^2(\sqrt{|a|})^2$. Тогда уравнение (2) запишется в виде $z^2-i^2(\sqrt{|a|})^2=0$, т.е.

$$(z-i\sqrt{|a|})(z+i\sqrt{|a|})=0.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет два корня: $z_{1,2}=\pm i\sqrt{|a|}$. ●

Например, уравнение

$$z^2=-25 \qquad (3)$$

имеет два корня: $z_{1,2}=\pm i\sqrt{|-25|}=\pm 5i$.

По аналогии со случаем $a>0$ корни уравнения (3) записывают в виде $z_{1,2}=\pm\sqrt{-25}$. При этом считается, что $\sqrt{-25}=i\sqrt{|-25|}=5i$.

Вообще, если $a < 0$, то $\sqrt{a}$ определяется формулой

$$\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}.$$

Например, $\sqrt{-1} = i\sqrt{|-1|} = i$; $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$.

Такое соглашение удобно тем, что для любого действительного a корни уравнения

$$z^2 = a \tag{4}$$

можно найти по формуле

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a}. \tag{5}$$

Если $a \neq 0$ ($a > 0$ или $a < 0$), то уравнение (4) имеет два различных корня. При $a = 0$ уравнение (4) имеет один корень: $z = 0$; в этом случае говорят также, что уравнение имеет два равных корня: $z_{1,2} = 0$, или один корень кратности два. Это удобно во многих случаях, например для того, чтобы во всех случаях была справедлива теорема Виета.

Отметим, что теперь для любого действительного a справедливо равенство

$$(\sqrt{a})^2 = a. \tag{6}$$

Введенное понятие корня из отрицательного числа позволяет записать корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{7}$$

по известной общей формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{8}$$

Задача 1. Решить уравнение $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Δ По формуле (8) находим

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}.$$

Ответ. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$. ▲

Итак, при любых действительных a, b, c, $a \neq 0$ корни уравнения (7) можно находить по формуле (8). При этом если дискриминант, т.е. подкоренное выражение в формуле (8) $D = b^2 - 4ac$, положителен, то уравнение (7) имеет два действительных различных корня. Если $D = 0$, то уравнение (7) имеет один корень (два равных). Если $D < 0$, то уравнение (8) имеет два различных (комплексных) корня.

Заметим, что в задаче 1 корни квадратного уравнения являются сопряженными.

Вообще корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются сопряженными.

○ Если $b^2 - 4ac < 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{|b^2 - 4ac|}$ и формулу (8) можно записать в виде:

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a},$$

откуда $z_2 = \bar{z}_1$. ●

Свойства комплексных корней квадратного уравнения являются такими же, как и у действительных корней. Сформулируем основные из них.

Пусть z_1, z_2 — корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$. Тогда справедливы следующие свойства:

1. Теорема Виета:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ z_1 \; z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{9}$$

2. При всех комплексных z справедлива формула

$$az^2 + bz + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2). \tag{10}$$

Формулы (9), (10) доказываются так же, как и для случая действительных корней.

В случае приведенного квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$, формулы (9), (10) имеют вид:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -p, \\ z_1 z_2 = q; \end{cases} \tag{11}$$

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)\,(z - z_2). \tag{12}$$

Задача 2. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень $z_1 = -1 - 2i$.

△ Второй корень: $z_2 = \bar{z}_1 = -1 + 2i$.

По формулам (11) находим $p = -(z_1 + z_2) = 2$, $q = z_1 z_2 = 5$.

Искомое уравнение: $z^2 + 2z + 5 = 0$. ▲

Задача 3. Разложить на множители квадратный трехчлен $z^2 - 6z + 10$.

Δ Корнями квадратного уравнения $z^2 - 6z + 10 = 0$ являются числа $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - i$.

Следовательно, $z^2 - 6z + 10 = (z - 3 - i)(z - 3 + i)$. ▲

Упражнения

279. Решить уравнение:

1) $z^2 = -81$; 2) $z^2 = -3$; 3) $z^2 + 0{,}01 = 0$;

4) $9z^2 + 125 = 0$; 5) $z^2 = -\sqrt{2}$; 6) $z^2 + \sqrt[3]{3} = 0$.

280. Вычислить:

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{-36}$; 4) $\sqrt{-49}$; 5) $\sqrt{-8}$; 6) $\sqrt{-27}$.

Решить уравнение (281–282).

281. 1) $z^2 - 2z + 2 = 0$; 2) $z^2 - 4z + 5 = 0$; 3) $z^2 + 6z + 13 = 0$;

4) $z^2 + 4z + 13 = 0$; 5) $z^2 + 2z + 17 = 0$; 6) $z^2 - 8z + 41 = 0$.

282. 1) $9z^2 + 6z + 10 = 0$; 4) $16z^2 - 32z + 17 = 0$;

2) $4z^2 + 4z + 5 = 0$; 5) $z^2 + 4z + 7 = 0$;

3) $9z^2 - 12z + 5 = 0$; 6) $z^2 - 6z + 11 = 0$.

---

283. Составить приведенное квадратное уравнение, имеющее корни:

1) $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$; 3) $z_1 = -4 + i$, $z_2 = -4 - i$;

2) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$; 4) $z_1 = -7 - 4i$, $z_2 = -7 + 4i$.

284. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень, и проверить ответ, решив полученное уравнение:

1) $z_1 = -1 + \frac{1}{3}i$; 3) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$;

2) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$; 4) $z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

Разложить на множители квадратный трехчлен (285–286).

285. 1) $z^2 + 2z + 5$; 3) $4z^2 + 8z + 5$;

2) $z^2 - 2z + 10$; 4) $25z^2 + 50z + 26$.

286. 1) $z^2 - 6z + 14$; 3) $-z^2 + z - 1$;

2) $z^2 + 8z + 18$; 4) $-z^2 + 10z - 26$.

§ 26*. Примеры решения алгебраических уравнений

Задача 1. Решить уравнение $z^2 = 3 + 4i$.

Δ Пусть $z = x + iy$, где x и y — неизвестные действительные числа. Тогда $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ и данное уравнение запишется в виде $x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i$. Приравнивая действительные и мнимые части, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Найдем действительные решения этой системы. Для этого из второго уравнения выразим y через x по формуле $y = \frac{2}{x}$ и подставим в первое уравнение: $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$, откуда $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Решим это биквадратное уравнение: $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, т.е. $x^2 = 4$ или $x^2 = -1$. Так как x — действительное число, то уравнение $x^2 = -1$ не имеет корней. Поэтому $x^2 = 4$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Подставляя эти значения в формулу $y = \frac{2}{x}$, получаем $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Следовательно, $z_1 = x_1 + iy_1 = 2 + i$, $z_2 = x_2 + iy_2 = -2 - i$.

Ответ. $z_{1,2} = \pm(2 + i)$. ▲

Задача 2. Решить уравнение $z^3 = -1$.

Запишем число -1 в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Будем искать z также в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда $z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$ и данное уравнение запишется в виде

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = \cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k),$$

откуда $r^3 = 1$, $r = 1$ и $3\varphi = \pi + 2\pi k$, $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, $z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Полагая $k = 0, 1, 2$, находим $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При остальных $k \in \boldsymbol{Z}$ получаются те же значения корней.

Ответ. $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $z^4 = 16$.

Δ Запишем число 16 в тригонометрической форме:

$$16 = 16(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда данное уравнение примет вид

$$r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 16(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k),$$

откуда $r^4 = 16$, $r = 2$, $4\varphi = 2\pi k$, $\varphi = \frac{\pi k}{2}$. Следовательно, $z = 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$. При $k = 0, 1, 2, 3$ имеем $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2i$. При остальных $k \in Z$ получаются те же значения корней.

Ответ. ± 2, $\pm 2i$. ▲

Вообще уравнение $z^n = a$, где a — комплексное число (в частности, действительное), n — натуральное число, $a \neq 0$, имеет n различных комплексных корней. Эти корни можно найти так же, как и в задачах 2, 3. Уравнение $z^n = 0$, где n — натуральное, имеет один (n-кратный) корень: $z = 0$.

Замечательным является тот факт, что на множестве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение, т.е. уравнение вида

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — комплексные числа, имеет хотя бы один корень. Это утверждение называют *основной теоремой алгебры*.

Доказательство этой теоремы не рассматривается в курсе школьной математики.

Упражнения

287. Решить уравнение:

1) $z^2 = -3 + 4i$; 2) $z^2 = 8 + 6i$; 3) $z^2 = 5 - 12i$;
4) $z^2 = -7 + 24i$; 5) $z^2 = -15 + 8i$; 6) $z^2 = 24 - 10i$.

288. С помощью тригонометрической формы комплексного числа решить уравнение:

1) $z^2 = -i$; 2) $z^2 = i$; 3) $z^2 = 9i$;
4) $z^2 = -16i$; 5) $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$; 6) $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Решить уравнение (289–290).

289. 1) $z^2 = -4i$; 2) $z^2 = 25i$; 3) $z^2 = -3 - 4i$;
4) $z^2 = -8 + 6i$; 5) $z^2 = -36i$; 6) $z^2 = 49i$.

290. 1) $z^3 = 1$; 2) $z^3 = -8$; 3) $z^3 = -64$;
4) $z^3 = -1$; 5) $z^4 = -1$; 6) $z^4 = 1$.

Упражнения к главе III

291. При каком значении x действительная часть комплексного числа равна 1:

1) $(x - 2) + 3i$; 3) $(3x - 7) - 5i$;
2) $(2x + 5) - 2i$; 4) $(x + 1) + i$?

292. При каком значении x действительная часть комплексного числа равна его мнимой части:

1) $2x - 3i$;
2) $(x+2)+i$;
3) $0{,}5-(x-1)\,i$;
4) $-1+5xi$?

293. Выполнить действия:

1) $3i-1+2i(1-i)$;
2) $6+(5-i)(1+i)$;
3) $(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)$;
4) $(7-\sqrt{5}i)(7+\sqrt{5}i)$.

294. Найти модуль комплексного числа:

1) $2-3i$;
2) $-5-7i$;
3) $-7+i$;
4) $-5i$;
5) $7i$;
6) $\sqrt{3}-2i$.

295. Вычислить:

1) $\frac{(i-1)(1+2i)}{3+i}$;
2) $\frac{(5-i)(1+5i)}{-5-12i}$;
3) $\frac{5}{3-5i}+\frac{5}{3+5i}$;
4) $\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}$;
5) $\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}$;
6) $\frac{4-5i}{4+i}+\frac{4+5i}{4-i}$.

296. Решить уравнение:

1) $(3-2i)+z=-2+i$;
2) $(-2+i)+z=3-2i$;
3) $(1-i)-z=2+\sqrt{3}i$;
4) $5+i=z-(3+\sqrt{2})i$.

297. На комплексной плоскости построить точку:

1) 1;
2) 7;
3) $-3i$;
4) $5i$;
5) $-1+2i$;
6) $1-2i$;
7) $-2-3i$;
8) $3+5i$.

298. Записать в алгебраической форме комплексное число:

1) $\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$;
2) $0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

299. Записать число в тригонометрической форме:

1) $-2+2i$;
2) $-\sqrt{3}-i$.

300. Решить уравнение:

1) $z^2-6z+10=0$;
2) $z^2-10z+26=0$;
3) $z^2-2z+5=0$;
4) $z^2-4z+8=0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Выполнить действия:

1) $(3+i)+(5-2i)$;
2) $(6-i)-(2+3i)$;
3) $(7+i)(10-i)$;
4) $\frac{5-2i}{7+3i}$.

2. Записать комплексное число в алгебраической форме:

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

3. Решить уравнение:

1) $z^2 + 5 = 0$; 2) $z^2 - 10z + 34 = 0$.

301. Найти действительные числа x и y из равенства:

1) $(4x + 3y) + (2x - y)i = 3 - 11i$;

2) $(6x + y) + (2y - 7x)i = 12 + 5i$.

302. Вычислить:

1) $\left(\frac{i^5 + 2}{i^7 - 1}\right)^2$; 2) $\left(\frac{4 + i^7}{3 - i^4}\right)^2$.

303. Построить окружность:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| = 3$.

304. Сравнить модули чисел: $\frac{1+i}{1-i}$ и $\frac{1-i}{1+i}$.

305. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень:

1) $z = 1 - \sqrt{2}i$; 2) $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}i$.

306*. Решить уравнение:

1) $z^2 = -24 + 10i$; 2) $z^2 = 15 - 8i$; 3) $z^2 = 16 - 8i$;

4) $z^2 = -16 + 8i$; 5) $z^4 = i$; 6) $z^4 = -i$.

307*. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство:

1) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; 2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

308*. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $3(\cos 100° + i\sin 100°) \cdot 2(\cos 20° + i\sin 20°)$.

309*. Вычислить:

1) $z^3 - z^2 + 1$ при $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$;

2) $z^2 + z + 1$ при $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

История развития числа уходит корнями в древние времена. Древнегреческие математики только натуральные числа считали «настоящими». В Древнем Египте и Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до н.э. при решении практических задач использовались дроби. В III в. до н.э. китайские математики ввели понятие отрицательного числа, а в III в. н.э. *Диофант* уже пользовался правилами действий с отрицательными числами. В VII в. н.э. индийские математики придавали наглядный образ отрицательным числам, сравнивая их с долгами. В VIII в. ученые знали, что у положительного числа существует два квадратных корня: один — положительное число, другой — отрицательное, но считали, что из отрицательных чисел нельзя извлекать квадратный корень.

В XVI в. в связи с изучением решений кубических уравнений возникла необходимость извлечения квадратных корней из отрицательных чисел. В 1545 г. итальянский математик *Дж. Кардано* (1501–1576) опубликовал работу «Великое искусство», в которой привел формулу корней кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$. Для этой формулы понадобились числа новой природы, которые он записал в общем виде: $a \pm \sqrt{-b}$ $(b > 0)$. В этой же работе Кардано предложил установить действия над такими числами по правилам обычной алгебры, в частности для $b > 0$ предложил считать $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b} = -b$. Числа вида $\sqrt{-b}$ $(b > 0)$ автор называл «чисто отрицательными» или «софистически отрицательными» и считал их бесполезными.

Однако уже в 1572 г. в книге другого итальянского математика *Р. Бомбелли* (1530–1572) были изложены правила арифметических действий над комплексными числами практически в том виде, в каком они известны и нам. В те времена комплексные числа называли *мнимыми*. Такое название ввел в обиход Р. Декарт, а обозначать *мнимую единицу* $\sqrt{-1}$ буквой i (первой буквой франц. сл. *imaginaire* — мнимый) предложил в 1777 г. Л. Эйлер — великий математик, родившийся в Швейцарии, а живший и работавший в Петербурге. В математической литературе символ i широко стал использоваться после публикации в 1831 г. работы немецкого математика *К. Гаусса* (1777–1855) «Теория биквадратных остатков». В этой работе Гаусс заменил название «мнимых чисел» на *комплексные* (впервые этот термин был введен в 1803 г. французом *Л. Карно*) и окончательно закрепил для науки геометрическую интерпретацию комплексного числа $a + bi$ как точки координатной плоскости с координатами $(a; b)$. Позднее комплексные числа также стали изображать с помощью векторов на координатной плоскости с началом в начале координат и концом в точке $M(a; b)$.

Понятия «модуль» и «аргумент» комплексного числа ввел французский математик Д'Аламбер (1717–1783), а сами термины были введены в обиход после широкого их использования в своих работах швейцарским математиком *Ж. Арганом* (1768–1822) и французским математиком *О. Коши*.

В начале XVIII в. была построена теория корней n-й степени из отрицательных и комплексных чисел, основанная на выведенной в 1707 г. английским математиком *А. Муавром* (1667–1754) формуле

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

С помощью этой формулы Л. Эйлер в 1748 г. вывел формулу $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, которая связывает показательную функцию с тригонометрическими. С помощью этой формулы, получившей название *формулы Эйлера*, стало возможным возводить число e в любую комплексную степень (напр., $e^{i\pi} = -1$), находить синусы, косинусы, логарифмы комплексных чисел. Таким образом была выстроена теория функций комплексной переменной. С помощью этой теории были решены многие задачи аэро- и гидродинамики, радиотехники, теории упругостей и пр.

Значительный вклад в развитие теории функций комплексной переменной внесли видные отечественные математики *М.В. Келдыш* (1911–1978), *М.А. Лаврентьев* (1900–1980), *Н.Н. Боголюбов* (1909–1992) и др.

§ 27. Комбинаторные задачи. Правило умножения

Задача 1. Сколько различных двузначных чисел имеют в своей записи только цифры 0, 1, 2, 3?

Δ В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных цифр, кроме нуля.

Запишем все двузначные числа, у которых на первом месте стоит цифра 1, на втором — цифры 0, 1, 2, 3. Таких чисел четыре:

$$10, 11, 12, 13.$$

Если на первом месте записать цифру 2, то получим числа:

$$20, 21, 22, 23;$$

если же на первом месте стоит цифра 3, то получим числа:

$$30, 31, 32, 33.$$

Ответ. Двенадцать. ▲

Эту задачу также можно решить с помощью следующего рассуждения.

Δ В записи двузначного числа, состоящего из данных цифр, на первом месте может стоять любая из трех цифр 1, 2, 3, а на втором — любая из четырех данных цифр. Поэтому с помощью этих цифр всего можно записать: $3 \cdot 4 = 12$ разных двузначных чисел. ▲

Задача 2. Сколько различных танцевальных пар (юноша, девушка) можно составить из пяти юношей и восьми девушек?

Δ Каждый из пяти юношей может пригласить любую из восьми девушек. Поэтому разных танцевальных пар можно составить $5 \cdot 8 = 40$. ▲

Выполненные при решении этих задач рассуждения опираются на следующее утверждение.

Правило умножения. Пусть некоторое множество состоит из m различных элементов одного вида и n разных элементов другого вида. Тогда число различных пар, состоящих из одного элемента первого вида и одного элемента второго вида, равно mn.

Задача 3. На районную олимпиаду школа должна направить команду из трех участников: одного из трех лучших надо выбрать для участия в олимпиаде по химии, одного из четырех — по физике, одного из семи — по математике. Сколькими способами можно составить такую команду?

Δ По правилу умножения для участия в олимпиадах по химии и физике можно составить пару $3 \cdot 4 = 12$ способами. Для каждой такой пары можно добавить участника по математике семью способами. По правилу умножения команду из трех участников можно составить $12 \cdot 7 = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ способами.

Ответ. 84 способами. ▲

Решение задачи 3 показывает, что правило умножения действует и тогда, когда множество состоит из трех (и более) видов его элементов.

При решении многих практических задач часто приходится имеющиеся предметы (элементы) *соединять* в разные наборы (комбинации). Таковы, например, парфюмерные наборы, конфет ассорти, наборы инструментов, делегации, спортивные команды. Задачи, в которых рассматриваются такие соединения и находится число различных соединений, называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором изучаются эти задачи и методы их решения, называют *комбинаторикой*.

В следующих параграфах будут рассмотрены основные виды соединений: *перестановки*, *размещения* и *сочетания*.

Упражнения

310. Сколько разных трехзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр: 1) 1, 2 и 3; 2) 1, 2, 3 и 4?

311. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр: 1) 6, 7 и 8; 2) 6, 7, 8 и 9?

312. Сколько разных двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2, 3 и 4?

313. Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три автодороги, а между B и C — железнодорожное и речное сообщения. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

314. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали по итогам первенства страны по футболу, если число участвующих в первенстве команд равно 16?

315. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день из шести разных учебных предметов?

---

316. В одной из стран автомобильные номера из четырех цифр (нуль может стоять и на первом месте) записываются на пластинках пяти различных цветов (каждый из пяти штатов этой страны имеет номера своего цвета). Сколько разных пластин с номерами может быть выдано автовладельцам в этой стране?

317. Десять участников конференции обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку другим участникам). Сколько всего карточек было роздано?

318. Десять участников конференции обменялись рукопожатиями, пожав руку каждому. Сколько всего рукопожатий было сделано?

319*. Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трехзначным числовым кодом?

320*. Сколько имеется семизначных натуральных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечетных местах, различны?

§ 28. Перестановки

Задача 1. Сколькими способами можно поставить на полке рядом пять разных книг?

Δ На первое место можно поставить любую из пяти книг, на второе — любую из четырех оставшихся, на третье место — любую из трех оставшихся, на четвертое — любую из двух оставшихся, на пятое место — последнюю книгу. Применяя последовательно правило умножения, получаем

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \cdot 1 = 120.$

Ответ. 120. ▲

В этой задаче было найдено число различных соединений из пяти элементов, которые отличались друг от друга только порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют *перестановками*.

> **Определение.** *Перестановками* из n разных элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква франц. сл. *Permutation* — перестановка) и читают так: «Пэ энное».

Последовательно применяя правило умножения, можно получить формулу числа перестановок из n элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n.$$

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\,n$ обозначают $n!$ (читается «эн факториал»). По определению $1! = 1$.

Таким образом,

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Задача 2. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?

Δ По формуле (1) находим

$P_{12} = 12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 12 = 479001600.$ ▲

Упражнения

321. Чему равно: 1) P_5; 2) P_8; 3) P_6; 4) P_9?

322. Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырех стульях в столовой детского сада?

323. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение 7 дней?

324. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы: 1) последней была цифра 4; 2) первой была цифра 2, а второй — цифра 3; 3) первыми были цифры 2 и 3, расположенные в любом порядке.

325. Упростить форму записи следующих выражений (k — натуральное число, $k > 5$):

1) $7! \cdot 8$; 2) $16 \cdot 15!$; 3) $12! \cdot 13 \cdot 14$;
4) $k!\,(k+1)$; 5) $(k-1)!\,k$; 6) $(k-1)!\,k\,(k+1)$;
7) $(k-2)!\,(k-1)\,k$; 8) $(k-5)!\,(k^2-7k+12)$.

326. Упростить:

1) $\frac{19!}{18!}$; 2) $\frac{22!}{20!}$; 3) $\frac{6!\cdot 4!}{8!}$; 4) $\frac{10!}{8!\cdot 3!}$;
5) $\frac{P_{n+2}}{P_n}$; 6) $\frac{P_{n+1}}{P_{n+3}}$; 7) $\frac{m!(m+1)}{(m+2)!}$; 8) $\frac{(k+4)!\,(k+5)}{(k+6)!}$,

если буквами k, m, n обозначены натуральные числа.

---

327. Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{3}$; 2) $\frac{nP_{n-2}}{P_n} = \frac{1}{10}$.

328. Имеется 10 книг, среди которых: 1) 8 книг различных авторов и двухтомник одного автора, которого не было среди предыдущих восьми; 2) 7 книг разных авторов и трехтомник восьмого автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

§ 29. Размещения

Задача 1. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

Δ Перебором убедимся в том, что из четырех цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43. ▲

Эту задачу также можно решить, используя правило умножения.

Δ В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырех цифр, а на втором — любая из трех оставшихся. По правилу умножения таких двузначных чисел: $4 \cdot 3 = 12$. $\blacktriangle$

При решении задачи из четырех данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причем любые два соединения отличались либо *составом элементов* (напр., 12 и 24), либо порядком их расположения (напр., 12 и 21).

Определение. *Размещениями* из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n (A — первая буква франц. сл. *Arrangement* — размещение, приведение в порядок) и читают так: «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.

Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

○ Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т.е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $m - 1$ элементов. По правилу умножения число таких соединений равно $m(m-1)$. Таким образом, $A_m^2 = m(m-1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $m - 2$ элементов. По правилу умножения число таких соединений равно $m(m-1)(m-2)$, т.е. $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Последовательно применяя правило умножения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)). \quad \bullet \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m.

Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = P_n,$$

т.е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$A_n^n = P_n. \qquad (2)$$

Задача 2. Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A, B, C, D, E, F?

Δ Задача сводится к нахождению числа размещений из 6 элементов по 3 элемента в каждом. По формуле (1) находим

$$A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120.$$

Ответ. 120 способами. ▲

Задача 3. Решить уравнение $A_n^2 = 42$ относительно n.

Δ Заметим, что $n \geqslant 2$. По формуле (1) $A_n^2 = n(n-1)$. По условию $A_n^2 = 42$, поэтому

$$n(n-1) = 42,$$

откуда $n^2 - n - 42 = 0$, $n_1 = 7$, $n_2 = -6$.

Так как корнем уравнения должно быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n_2 = -6$ — посторонний корень.

Ответ. $n = 7$. ▲

Преобразуем формулу для числа размещений A_m^n.

○ Запишем формулу (1) так:

$$A_m^n = (m-n+1)(m-n+2)\cdot \ldots \cdot (m-1)m.$$

Умножив обе части этого равенства на $(m-n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \times$ $\times (m-n)$, получим $(m-n)!\cdot A_m^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n)(m-n+1)\times$ $\times(m-n+2)\cdot \ldots \cdot (m-1)m$, откуда $(m-n)!\cdot A_m^n = m!$,

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \; ● \qquad (3)$$

Отметим, что формула (3) справедлива при $m > n$.

Для того чтобы формула (3) была справедлива и для $m = n$, определяют $0! = 1$.

Задача 4. Вычислить

$$\frac{A_{12}^5 + A_{12}^6}{A_{12}^4}.$$

Δ По формуле (3), находим

$$\frac{A_{12}^5+A_{12}^6}{A_{12}^4}=\frac{\frac{12!}{7!}+\frac{12!}{6!}}{\frac{12!}{8!}}=\frac{8!}{7!}+\frac{8!}{6!}=8+7\cdot 8=64.\ \blacktriangle$$

Упражнения

329. Вычислить:

1) A_3^1; 2) A_3^2; 3) A_7^2; 4) A_7^7;

5) A_8^3; 6) A_8^4; 7) A_{10}^2; 8) A_{10}^4.

330. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных уроков?

331. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырехугольника с помощью букв A, B, C, D, E, F?

332. В классе 30 чел. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

333. В чемпионате по футболу участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

334. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{11}^3-A_{10}^2}{A_9^1}$; 2) $\dfrac{A_{12}^4\cdot A_7^7}{A_{11}^9}$.

---

335. Решить уравнение относительно m:

1) $A_{m+1}^2=156$; 2) $A_m^5=18A_{m-2}^4$.

336. Доказать, что $A_n^{k+1}=(n-k)A_n^k$, где $k<n$, k, n — натуральные числа.

§ 30. Сочетания и их свойства

Задача 1. Из пяти шахматистов для участия в турнире нужно выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать?

Δ Из пяти шахматистов можно составить A_5^2 пар, если в каждой паре учитывать не только состав, но и порядок расположения шахматистов. Но из этих пар надо выбрать только те, которые отличаются составом участников, но не их порядком. Таких пар в 2 раза меньше, т.е.

$$\frac{A_5^2}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10.$$

Ответ. 10 способов. ▲

При решении задачи из пяти человек были образованы соединения по 2, которые отличались только составом.

Определение. *Сочетаниями* из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из m элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква франц. сл. *Combinasion* — сочетание) и читают так: «Це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_5^2 = 10$.

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

○ Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учета порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n = n!$ соединений, отличающихся друг от друга только порядком расположения элементов. Тем самым получились размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. С другой стороны, по правилу умножения, число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \quad \bullet \qquad (1)$$

Например, $C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$

Заметим, что если $m = n$, то

$$C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$$

Учитывая, что

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ и } P_n = n!,$$

формулу (1) можно представить в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\, n!}. \qquad (2)$$

Например, $C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Задача 2. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

Δ Выбор двух карт из колоды без учета порядка их расположения является сочетанием. По формуле (1) находим

$$C_{36}^2 = \frac{A_{36}^2}{P_2} = \frac{36 \cdot 35}{2!} = 18 \cdot 35 = 630. \ ▲$$

Докажем следующее свойство числа сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}. \qquad (3)$$

○ По формуле (2) получаем

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^n \ ●$$

Это свойство иногда позволяет упрощать вычисления. Например,
$C_{20}^{19} = C_{20}^1 = \frac{20}{1!} = 20$; $C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{2!} = 50 \cdot 99 = 4950.$

Среди свойств числа сочетаний выделяют *рекуррентное свойство числа сочетаний*:

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

○ По формуле (1) находим

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{A_m^n}{P_n} + \frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!} +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(n+1)+m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)\cdot m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1-n)}{(n+1)!} = C_{m+1}^{n+1}. \ ●$$

Упражнения

337. Найти:

1) C_6^2; 2) C_8^3; 3) C_8^6; 4) C_8^5; 5) C_9^1; 6) C_9^8;

7) C_{10}^{10}; 8) C_{10}^0; 9) C_{10}^3; 10) C_{10}^7; 11) C_{100}^{98}; 12) C_{70}^2.

338. Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?

339. Сколько различных аккордов, содержащих 3 звука, можно взять на 13 клавишах одной октавы?

340. В помещении 20 ламп. Сколько существует разных вариантов освещения, при котором должны светиться только 18 ламп?

341. Имеется 15 точек на плоскости, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

342. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

343. Сколькими способами можно составить из партии, содержащей n деталей, комплект из p деталей ($p \leqslant n$) для контроля за качеством продукции?

---

344. В школьном хоре 6 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно выбрать из состава хора двух девочек и одного мальчика для участия в выступлении окружного хора?

345. Решить уравнение относительно m:

1) $C_m^3 = \frac{4}{15} C_{m+2}^4$; 2) $12 C_{m+3}^{m-1} = 55 A_{m+1}^2$.

346. Найти значение выражения, предварительно упростив его:

1) $C_{15}^{12} + C_{15}^{13}$; 3) $C_{21}^4 - C_{20}^4$;

2) $C_{11}^3 + C_{11}^2$; 4) $C_{101}^3 - C_{100}^3$.

347. В вазе лежат 5 разных яблок и 6 различных апельсинов. Сколькими способами из них можно выбрать 2 яблока и 2 апельсина?

348*. Колода карт содержит по 13 карт каждой из четырех мастей. Сколькими способами можно выбрать из колоды следующий набор: 3 карты *пиковой масти*, 4 карты — *трефовой*, 5 карт — *червовой*, 2 карты *бубновой масти*?

§ 31. Биномиальная формула Ньютона

Вы уже знакомы с формулами квадрата и куба суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Теперь познакомимся с формулой n-й степени двучлена $a + b$ (или *бинома* $a + b$). Последовательно запишем формулы степени бинома:

$(a+b)^0 = 1$;

$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$;

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$;

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$;

$$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=1\cdot a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1\cdot b^4;$$
$$(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)=1\cdot a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1\cdot b^5.$$

Можно показать, что коэффициенты разложения степени бинома можно найти по следующей схеме, которая называется *треугольником Паскаля*:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
...

В каждой строке этой схемы коэффициенты разложения степени бинома, кроме первого и последнего, получаются попарным сложением коэффициентов предыдущей строки. Например, шестая строка получается так:

$$1,\ \ 5=1+4,\ \ 10=4+6,\ \ 10=6+4,\ \ 5=4+1,\ \ 1.$$

Напомним, что $C_m^m=1$ и по определению $C_m^0=1$.

В основе построения *треугольника Паскаля* лежит свойство сочетаний $C_{m+1}^{n+1}=C_m^n+C_m^{n+1}$, рассмотренное в предыдущем параграфе. Поэтому коэффициенты разложения степени бинома также можно записать с помощью числа сочетаний:

$$(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b;$$
$$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2;$$
$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3;$$
$$(a+b)^4=C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4.$$

Вообще справедлива следующая биномиальная формула Ньютона:

$$(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2+\ldots+C_m^{m-1}ab^{m-1}+C_m^mb^m. \quad (1)$$

Формулу (1) часто для краткости называют *бином Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*.

Заметим, что в разложении (1) степени числа a убывают от m до 0, степени числа b возрастают от 0 до m и биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца разложения, равны, так как $C_m^k=C_m^{m-k}$.

Задача 1. Найти разложение бинома:

$$1)\ (2a+1)^5; \qquad 2)\ (x-1)^6.$$

Δ По формуле (1) находим:

1) $(2a+1)^5 = (2a)^5 + C_5^1(2a)^4 + C_5^2(2a)^3 + C_5^3(2a)^2 + C_5^4(2a)^1 + 1 =$
$= 32a^5 + 80a^4 + 80a^3 + 40a^2 + 10a + 1;$

2) $(x-1)^6 = x^6 + C_6^1 x^5(-1)^1 + C_6^2 x^4(-1)^2 + C_6^3 x^3(-1)^3 + C_6^4 x^2(-1)^4 +$
$+ C_6^5 x(-1)^5 + (-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$ ▲

Задача 2. Доказать равенство

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Δ Это равенство получается из формулы (1) при $a = b = 1$. ▲

Упражнения

349. Записать разложение бинома:

1) $(1+x)^7$; 2) $(x-2)^4$; 3) $(2x+3)^4$;

4) $(3x-2)^4$; 5) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$; 6) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^6$.

---

350. Используя свойства числа сочетаний, найти сумму:

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$;

2) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$.

351*. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

352*. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

Упражнения к главе IV

353. Вычислить:

1) $\frac{8!-6!}{5!}$; 2) $\frac{60!}{58!} - \frac{50!}{48!}$.

354. Упростить:

1) $\frac{(n+2)!}{n!}$; 2) $\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)n!$.

355. Найти значение выражения:

1) $\frac{A_6^3}{P_4} + \frac{A_{11}^6}{11P_6}$; 2) $\left(\frac{C_{11}^7}{10} - \frac{C_7^2}{10}\right)\frac{P_5}{A_6^4}$.

356. Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_{n+2}}{P_n}=12$; 2) $\frac{1}{P_{n-4}}=\frac{20}{P_{n-2}}$; 3) $A_{n+1}^4=6n(n+1)$;

4) $A_{n-1}^5=2A_{n-2}^5$; 5) $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4}=\frac{8}{5}$; 6) $C_n^3=4C_{n-2}^2$.

357. Сколькими способами можно составить график очередности ухода в отпуск 8 сотрудников лаборатории?

358. Сколько существует способов делегирования на конференцию двоих человек из 8 сотрудников лаборатории?

359. Восемь сотрудников лаборатории участвовали в научном конкурсе, по результатам которого были присуждены одна первая и одна вторая премии. Сколькими способами могут быть присуждены рассматриваемые премии?

360. Сколькими разными способами можно рассадить троих учащихся, пришедших на факультативные занятия, на сорока имеющихся в классе стульях?

361. Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте 80 солдат и 5 офицеров?

362. Сколько диагоналей имеет выпуклый пятиугольник? семиугольник? n-угольник?

363. Найти значение выражения, предварительно упростив его:

1) $C_{13}^{10}+C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^3+C_{14}^2$.

364. Используя свойства числа сочетаний, найти:

1) $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$; 2) $C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$.

365. Найти разложение бинома:

1) $(x+1)^6$; 2) $(x-1)^5$; 3) $(2+a)^4$; 4) $(a+3)^4$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти:

1) P_7; 2) A_8^3; 3) C_8^3; 4) $\frac{P_6}{A_7^5}$.

2. Упростить:

1) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; 2) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}$.

3. Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 различных предметов?

4. В одном классе изучаются 10 разных предметов. В пятницу завуч должен поставить в расписание этого класса 4 различных предмета. Сколькими способами он может это сделать?

5. Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в шести классных комнатах (по одной группе в комнате)?

6. Сколько существует трехзначных цифровых кодов, в которых нет одинаковых цифр?

7. Записать разложение бинома:

1) $(x+y)^6$; 2) $(1-a)^5$.

---

366. Имеются отличающиеся друг от друга 7 роз и 5 веток зелени. Нужно составить букет из трех роз и двух веток зелени. Сколькими способами это можно сделать?

367. В двоичной системе счисления, используемой в ЭВМ, информация записывается с помощью цифр 0 и 1. В некоторой ЭВМ каждое «машинное слово» записывается в ячейке памяти, содержащей 32 пронумерованных двоичных разряда. Сколько различных «слов» может быть записано в такой ячейке?

368. В одной стране номера автомобилей составляются из двух неодинаковых букв алфавита, который содержит 20 букв, и четырех цифр (с возможными повторами). Скольким машинам можно присвоить полученные таким образом номера?

369. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

370. В чемпионате страны по футболу участвуют 18 команд, каждые две команды встречаются на футбольных полях 2 раза. Сколько матчей играется в сезоне?

371. Сколькими способами $2n$ разных элементов можно разбить на пары?

372. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой из двух стопок было по 2 туза?

373. Используя свойства числа сочетаний, найти:

1) $C_{12}^2+C_{12}^3+C_{13}^4$; 2) $C_9^3+C_9^4+C_{10}^5$; 3) $C_8^4-C_7^4$; 4) $C_9^3-C_8^2$;

5) $C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$; 6) $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_9^9+C_9^8+C_9^7+C_9^6+C_9^5$.

374. Найти разложение степени бинома:

1) $(2a-1)^5$; 2) $\left(\frac{1}{2}+2b\right)^6$; 3) $\left(3x+\frac{1}{3}\right)^4$; 4) $\left(\frac{y}{3}-3\right)^5$.

375*. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий $\frac{1}{x}$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Задачи, связанные с возможным выбором и упорядочением определенных объектов, приходилось решать во многих сферах человеческой деятельности. С такими задачами, получившими название «комбинаторных», люди сталкивались еще в древности. Так, в Древнем Китае не только математики, но и простые люди увлекались составлением *магических квадратов* (в них заданные числа надо было расположить так, чтобы их суммы по горизонталям, вертикалям и главным диагоналям были одинаковые). В Древней Греции занимались теорией *фигурных чисел*, а также составлением различных фигур из частей специальным способом разрезанного квадрата. В разных странах решались комбинаторные задачи, связанные с такими играми, как шахматы, шашки, карты, кости и т.п.

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым *Дж. Кардано*, *Н. Тарталье* (ок. 1499–1557), *Г. Галилею* (1564–1642) и французским ученым *Б. Паскалю* (1623–1662) и *П. Ферма*. Комбинаторика как наука стала развиваться в XVIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитывать число разных комбинаций элементов.

Комбинаторику как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый *Г. Лейбниц* в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666 г. Ему также принадлежит и введение самого термина «комбинаторика». Значительный вклад в развитие комбинаторики внес *Л. Эйлер*.

В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика добилась новых успехов. Так, с помощью ЭВМ была решена комбинаторная задача, известная под названием *проблема четырех красок*. Удалось доказать, что любую карту можно раскрасить в 4 цвета таким образом, что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут окрашены в один и тот же цвет.

§ 32. Вероятность события

Практикой установлено, что в часто происходящих случайных явлениях существуют определенные закономерности. Задача теории вероятностей — *установление и математическое исследование закономерностей массовых случайных явлений.*

Рассмотрим эксперименты с подбрасыванием монеты, при которых подсчитывается n — число подбрасываний и f — число выпадений «орла». Число f называют частотой события «выпал орел», а число $\frac{f}{n}$ — *относительной частотой* этого события. Опыт показывает, что при увеличении числа экспериментов (n) относительная частота появления «орла» все более и более приближается к числу $\frac{1}{2}$, которое называется *вероятностью* рассматриваемого события («выпал орел»).

В ряде случаев вероятность события может быть определена и без проведения экспериментов. Познакомимся с различными видами событий, наиболее часто рассматриваемыми в курсе теории вероятностей.

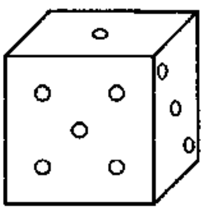

Рис. 78

Например, при одном бросании игральной кости возможны следующие *события (исходы)*: на верхней грани может оказаться одно из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6, представленных на кубике точками (рис. 78).

Каждое из этих событий является *случайным*, так как оно может произойти, а может не произойти.

Однако тот факт, что выпадет одно из чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6, — *достоверное событие*, так как при бросании игральной кости оно *обязательно* произойдет.

Выпадение других чисел при одном бросании, например числа 7, является *невозможным событием*.

Рассмотренные возможные при бросании игральной кости события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого), *единственно возможны* (обязательно появится одно число) и *равновозможны* (у всех чисел шансы появиться одинаковы). Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходами* испытания).

События обычно обозначают буквами A, B, C, ...

Рассмотрим более сложное событие A — выпадение четного числа очков при одном бросании игральной кости. Событие A наступит, если произойдет одно из элементарных событий: выпадет либо число 2, либо число 4, либо число 6. Эти три элементарных события являются *благоприятствующими* событию A.

Очевидно, что появление четного числа очков при одном бросании игральной кости имеет больше шансов, чем появление, например, числа 1. Для количественной характеристики возможности наступления события и вводится понятие вероятности события, классическое определение которого будет сейчас сформулировано.

Пусть n — число всех элементарных исходов некоторого испытания, m — число благоприятствующих событию A исходов, тогда вероятность события A (обозначается $P(A)$) определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Задача 1. Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании игральной кости?

Δ Пусть событие A — выпадение четного числа очков. Тогда число благоприятствующих ему исходов $m = 3$, число всех элементарных исходов $n = 6$. По формуле (1) находим

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Вероятность достоверного события равна единице, так как в этом случае $m = n$ и $P(A)=\frac{n}{n}=1$. Вероятность невозможного события равна нулю, так как в этом случае $m = 0$ и $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Таким образом, в любом случае

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Задача 2. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет «пятерка» или «шестерка».

Δ Событие A — появление «пятерки» или «шестерки». Число событий, благоприятствующих событию A, равно двум, т.е. $m = 2$. Число всех элементарных событий $n = 6$, поэтому

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Задача 3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

Δ Пусть событие A — сумма очков на двух костях равна 6.

Благоприятствующими событию A будут следующие выпавшие пары очков: 1 и 5, 2 и 4, 3 и 3, 4 и 2, 5 и 1. Таким образом, $m = 5$.

В результате бросания двух игральных костей любая из шести граней одной кости (с соответствующим ей числом очков) может соединиться с любой из шести граней другой кости. Согласно правилу умножения, имеется $6 \cdot 6 = 36$ различных элементарных событий в результате бросания двух костей, т. е. $n = 36$.

Таким образом, искомая вероятность $P(A) = \frac{5}{36}$. ▲

Упражнения

376. К какому типу событий (достоверному, невозможному, случайному) относится следующее событие:

1) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении сталь находится в жидком состоянии;

2) наугад вынутая из кошелька монета оказалась пятирублевой;

3) наугад названное натуральное число больше нуля?

377. Какова вероятность выпадания числа, кратного 3, в результате подбрасывания игральной кости?

378. Какова вероятность того, что на открытом наугад листе нового отрывного календаря на високосный год окажется 5-е число?

379. Допустим, вы забыли последнюю цифру номера телефона друга и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что вы ее верно набрали?

---

380. В коробке находится 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) черный; 2) белый; 3) красный; 4) черный или белый; 5) черный или красный; 6) красный или белый; 7) черный, или белый, или красный; 8) зеленый?

381. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что:

1) на всех трех костях выпало одинаковое количество очков;

2) сумма очков на всех костях равна 4;

3) сумма очков на всех костях равна 5?

382. В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2) только один выигрышный; 3) выигрышного билета не оказалось?

§ 33. Сложение вероятностей

Суммой событий A и B называют событие $A + B$, состоящее в появлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал два выстрела по мишени и A — попадание в мишень при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком по мишени хотя бы при одном из выстрелов.

Если события A и B — несовместные, то событие $A+B$ состоит в наступлении одного из этих событий. Например, если A — появление одного очка на игральной кости при одном бросании, а B — появление двух очков, то событие $A+B$ — появление при одном бросании либо одного, либо двух очков. Очевидно, что в данном случае $P(A+B)=\frac{1}{3}$.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

○ Пусть n — общее число равновозможных элементарных исходов испытания, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B.

Число исходов, благоприятствующих либо событию A, либо событию B (т.е. событию $A+B$), равно m_1+m_2. Тогда

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B). \quad \bullet$$

Задача. В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

△ Пусть событие A — появление красного шара, B — появление синего шара, тогда $A+B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Упражнения

383. Выяснить, являются ли события A и B несовместными, если

1) A — появление туза, B — появление дамы при одном изъятии карты из колоды карт;

2) A — появление туза, B — появление карты бубновой масти при одном изъятии карты из колоды карт;

3) A — выпадение четырех очков, B — выпадение четного числа очков при одном бросании игральной кости;

4) A — выпадение четырех очков, B — выпадение нечетного числа очков при одном бросании игральной кости.

384. В пачке находится 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 16 билетов спортивной лотереи и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что один наудачу вынутый билет будет билетом либо денежно-вещевой, либо художественной лотереи?

385. В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность, что эта карта либо туз, либо дама?

§ 34. Вероятность противоположного события

Событие $\overline{A}$ называется событием, противоположным событию A, если оно происходит, когда не происходит событие A.

Например, если событие A — выпадание *орла* при бросании монеты, то противоположным ему событием $\overline{A}$ будет выпадание *решки*. Противоположными событиями также будут: изъятие из партии деталей стандартной и нестандартной деталей; выпадание 6 очков при бросании игральной кости и выпадание не 6 очков (т.е. выпадание одного, двух, трех, четырех или пяти очков).

Если в некотором испытании из n элементарных событий событию A благоприятствуют m_1 событий, а событию $\overline{A}$ благоприятствуют m_2 событий, то

$$m_1 + m_2 = n. \qquad (1)$$

Так, например, при бросании игральной кости — 6 элементарных событий ($n = 6$), событию A — «выпало 6 очков» —благоприятствует одно событие ($m_1 = 1$), а событию $\overline{A}$ — «выпало не 6 очков» — благоприятствуют 5 элементарных событий ($m_2 = 5$): $1 + 5 = 6$.

Теорема 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

○ Пусть в результате некоторого испытания могут произойти n элементарных событий и пусть событию A благоприятствуют m_1 элементарных событий, а противоположному ему событию $\overline{A}$ благоприятствуют m_2 элементарных событий. Вероятности появления событий A и $\overline{A}$ соответственно равны: $P(A) = \frac{m_1}{n}$ и $P(\overline{A}) = \frac{m_2}{n}$, где, согласно формуле (1), $m_1 + m_2 = n$. Тогда

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

т.е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \bullet \qquad (2)$$

Задача 1. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

Δ Если событие A — попадание в мишень, то, по условию, $P(A) = 0,6$. Промах — противоположное попаданию событие, и его вероятность:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. В роте из 100 солдат двое имеют высшее образование. Какова вероятность того, что в случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

Δ Пусть событие A — во взводе хотя бы один человек имеет высшее образование, тогда событие $\overline{A}$ — ни один человек во взводе не имеет высшего образования. В данной ситуации проще вычислить $P(\overline{A})$, чем $P(A)$. Найдем $P(\overline{A})$.

Число способов составления взвода в 30 человек из 100 солдат роты равно C_{100}^{30}. Число солдат, не имеющих высшего образования, равно $100 - 2 = 98$. Из 98 человек составить взвод из 30 человек можно C_{98}^{30} способами. Вероятность того, что среди отобранных 30 человек нет ни одного с высшим образованием:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{98}^{30}}{C_{100}^{30}} = \frac{\dfrac{98!}{30!\,68!}}{\dfrac{100!}{30!\,70!}} = \frac{98!\,70!}{68!\,100!} = \frac{69 \cdot 70}{99 \cdot 100} = \frac{161}{330}.$$

Отсюда находим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{161}{330} = \frac{169}{330} \approx 0,512. \quad \blacktriangle$$

Упражнения

386. Что является событием, противоположным событию:

1) сегодня первый урок — физика;
2) экзамен сдан на «отлично»;
3) на игральной кости выпало меньше 5 очков;
4) хотя бы одна пуля при трех выстрелах попала в цель?

387. Вероятность выигрыша главного приза равна 10^{-8}. Какова вероятность не выиграть главный приз?

388. Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино (28 костей) одна кость домино не будет «дублем».

---

389. В ящике лежат 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар не будет белым? (Решить задачу двумя способами.)

390. В студенческой группе 22 чел., среди которых 4 девушки. Какова вероятность того, что среди троих случайным образом выбранных из этой группы студентов окажется по крайней мере одна девушка?

§ 35. Условная вероятность

Произведением событий A и B называется событие AB, состоящее в появлении и события A и события B.

Например, если событие A — попадание в мишень при первом выстреле, а событие B — попадание в мишень при втором выстреле, то событие AB — попадание в мишень при обоих выстрелах. Если A — событие, состоящее в том, что из колоды карт наудачу вынимается карта красной масти, а событие B — вынимается туз, то событие AB — из колоды карт вынут туз красной масти.

При совместном рассмотрении двух случайных событий возникает вопрос о влиянии наступления одного события на появление другого.

Пусть, например, один раз бросается игральная кость. Событие A — выпадание нечетного числа очков (1, 3 или 5), событие B — выпадание числа очков, меньшего четырех (т.е. 1, 2 или 3). Если считать, что наступило событие B (три элементарных исхода), то в нем событию A благоприятствуют два элементарных исхода (1 и 3). Тогда вероятность появления события A при условии наступления события B равна $\frac{2}{3}$. Если бы не было известно о наступлении события B, то вероятность наступления события A была бы равна $\frac{1}{2}$. Так как $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, то следует признать, что наступление события B увеличивает вероятность наступления события A.

Для количественной характеристики зависимости одного события от другого вводится понятие *условной вероятности*.

Если A и B — два случайных события, которые могут произойти в одном испытании, причем $P(B) \neq 0$, то число $\frac{P(AB)}{P(B)}$ называют условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B, или просто условной вероятностью события A.

Вероятность события А при условии наступления события В обозначается $P(A/B)$. Таким образом, согласно определению

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)$$

Задача 1. Какова вероятность того, что наугад вынутая из полного набора кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости меньше, чем 5?

Δ В наборе домино 28 костей, из них 7 «дублей». На девяти костях сумма очков меньше, чем 5 (0–0, 0–1, 0–2, 0–3, 0–4, 1–1, 1–2, 1–3, 2–2).

Пусть событие B — сумма очков на вынутой кости — меньше пяти, а событие A — вынутая кость есть «дубль», тогда событие AB — на вынутой кости, являющейся «дублем», сумма очков меньше пяти (таких костей 3: 0—0, 1—1, 2—2).

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}}=\frac{1}{3}. \quad \blacktriangle$$

Значение $P(A/B)$ можно было найти и при использовании классического определения вероятности: из тех 9 случаев, к которым сводится событие B, событию A благоприятствуют три: $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Задача 2. В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика 2 раза вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что: 1) первым был извлечен белый шар, а вторым — черный; 2) вторым был вынут черный шар при условии, что первым уже был извлечен белый.

Δ При решении задачи рассмотрим события:

A — первым вынут белый шар;

B — вторым вынут черный шар;

AB — последовательно извлечены белый, затем черный шары;

B/A — вторым вынут черный шар при условии, что первым был извлечен белый.

1) Число всех возможных вариантов извлечения двух шаров из ящика с пятью шарами (с учетом порядка их появления) равно $A_5^2=5\cdot 4=20$, т.е. $n=20$. Благоприятствующими событию AB будут все возможные упорядоченные пары *белый шар, черный шар*, составленные из имеющихся трех белых и двух черных шаров. Таких соединений, согласно правилу умножения, будет $3\cdot 2=6$ ($m=6$). Таким образом,

$$P(AB)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

2) После извлечения из ящика первым белого шара (произошло событие A) там останутся 2 белых и 2 черных шара. Появлению черного шара вторым из четырех оставшихся ($n=4$) благоприятствуют два события ($m=2$), поэтому

$$P(B/A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Значение $P(B/A)$ можно получить и по формуле (1)

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Действительно, $P(A)=\frac{3}{5}$, так как $n=5$ (в ящике первоначально находилось 5 шаров) и $m=3$ (белых было 3). Подставив в формулу (1) $P(AB)=\frac{3}{10}$ и $P(A)=\frac{3}{5}$, получим

$$P(B/A)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{3\cdot 5}{10\cdot 3}=\frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

На основании формулы (1) записывается так называемая *теорема умножения:*

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B)=P(B/A)\cdot P(A), \qquad (2)$$

так как события AB и BA — одно и то же событие.

Задача 3. В лаборатории 7 женщин и 3 мужчин. Случайным образом из числа этих сотрудников для научной конференции выбираются один докладчик и один содокладчик. Какова вероятность того, что докладчиком будет выбрана женщина, а содокладчиком — мужчина?

Δ Пусть событие A — докладчиком выбрана женщина, событие B — содокладчик — мужчина.

1-й способ решения. Вероятность того, что сначала выбирался основной докладчик и им оказалась женщина (наступило событие A), равна

$$P(A)=\frac{7}{10}.$$

Вероятность того, что вторым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), вычисляется при условии, что первой уже была выбрана женщина, т.е.

$$P(B/A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Согласно формуле (2) имеем

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{30}.$$

2-й способ решения. Вероятность того, что первым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), равна

$$P(B)=\frac{3}{10}.$$

Вероятность того, что вторым выбирался докладчик и им оказалась женщина (событие A), вычисляется при условии, что первым уже выбран мужчина, т.е.

$$P(A/B)=\frac{7}{9}.$$

Применяя формулу (2), получаем

$$P(BA) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}. \ \blacktriangle$$

Сравнивая результаты двух способов решения задачи 2, убеждаемся в справедливости формулы (2).

Упражнения

391. На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берет по одному карандашу и обратно их не кладет. Найти вероятность того, что: 1) вторым был взят красный карандаш при условии, что первым был синий; 2) вторым взят синий карандаш при условии, что первым оказался синий; 3) вторым взят синий карандаш при условии, что первым был красный; 4) вторым взят красный карандаш при условии, что первым также оказался красный карандаш.

392. В барабане находится 10 лотерейных билетов, из них 2 выигрышных. Из барабана 2 раза вынимают по одному билету, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что: 1) второй раз был извлечен билет без выигрыша при условии, что первым оказался выигрышный билет; 2) первый раз был вынут выигрышный билет, а второй раз — билет без выигрыша?

---

393. Из ящика, содержащего 4 белых и 5 красных шаров, 2 раза наугад извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что: 1) вторым извлечен красный шар при условии, что первым также оказался красный шар; 2) оба раза извлекались красные шары.

394. Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимаются и не возвращаются 2 карты. Какова вероятность того, что: 1) оба раза извлекались карты *красной масти*; 2) первой была вынута карта *красной масти*, а второй — *черной масти*; 3) второй вынута карта *черной масти* при условии, что первой была карта *красной масти*?

395. В урне находится 10 белых и 10 черных шаров. Из нее последовательно вынимаются 2 шара и не возвращаются обратно. Какова вероятность того, что: 1) оба раза извлекались шары черного цвета; 2) первым вынут белый шар, а вторым — черный; 3) вторым извлечен черный шар при условии, что первым был вынут белый шар?

396. В цехе работают 10 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам последовательно наугад выбираются 2 человека для делегирования на профсоюзную конференцию. Какова вероятность того, что: 1) выбранными окажутся две женщины; 2) выбранными окажутся двое мужчин; 3) первым выбран мужчина, а второй — женщина; 4) вторым выбран мужчина при условии, что первым также был мужчина?

397. Ученик, идя на экзамен, знал ответы на 25 билетов из 30, предлагаемых экзаменатором. На первый билет ученик не знал ответа и, не возвращая его экзаменатору, вытянул второй билет. Какова вероятность того, что: 1) вторым ему достался билет, на который он знал ответ; 2) вторым ему достался билет, на который он не знал ответа?

398. Студент, которому предстояло сдавать зачет, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он: 1) верно ответит на два вопроса; 2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?

§ 36. Независимые события

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Определение независимости событий согласуется с введенным в § 35 понятием условной вероятности.

Действительно, событие A является независимым от события B тогда и только тогда, когда наступление события B не влияет на вероятность наступления события A, т. е. когда

$$P(B/A) = P(A).$$

З а д а ч а 1. Найти вероятность того, что при первом бросании игральной кости появятся 6 очков, а при втором — нечетное число очков.

∆ Событие A — появление 6 очков при первом бросании кости, событие B — появление четного числа очков при втором бросании — независимые события. Учитывая, что $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, по формуле (1) найдем $P(AB)$:

$$P(AB) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \quad ▲$$

З а д а ч а 2. В изготовленной партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. В красный цвет окрашены $\frac{3}{4}$ всех мячей, а остальные — в синий. Какова вероятность того, что наугад вынутый мяч будет небракованным и красным?

Δ Пусть событие A — появление бракованного мяча. По условию $P(A) = 0{,}004$. Появление небракованного мяча — событие $\overline{A}$ и

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$$

Пусть событие B — появление красного мяча, тогда, согласно условию, $P(B) = \frac{3}{4}$.

Задача сводится к нахождению вероятности совместного появления независимых событий $\overline{A}$ и B, т.е. к нахождению вероятности событий $\overline{A}B$. Согласно формуле (1) имеем

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}996 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}747. \quad \blacktriangle$$

Упражнения

399. Выяснить, являются ли независимыми события A и B, если:

1) игральная кость бросается дважды; событие A — при первом бросании выпало 2 очка, событие B — при втором бросании выпало 5 очков;

2) брошены две игральные кости; A — на первой кости появилось 6 очков, B — на второй кости также 6 очков;

3) из колоды карт дважды вынимают по одной карте, возвращая вынутую карту в колоду; A — первой вынута *дама пик*, B — второй также вынута *дама пик*;

4) из колоды карт дважды вынимают по одной карте, не возвращая их в колоду; событие A — первой вынута *шестерка треф*, событие B — вторым вынут *король пик*.

400. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на обеих костях появятся по 2 очка?

401. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпадет четное число очков, а на второй — нечетное?

402. Вероятность попадания в мишень равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов?

403. Вероятность поражения цели из первого орудия равна 0,7, а из второго — 0,6. Найти вероятность поражения цели из обоих орудий, выстреливших независимо друг от друга.

404. В урне лежат 2 белых, 3 красных и 5 черных шаров. Дважды вынимают по одному шару и возвращают их обратно в урну. Какова вероятность того, что: 1) первым вынут красный шар, а вторым — черный; 2) первым вынут черный шар, а вторым — белый?

---

405. Дважды бросается игральная кость. Событие A — при первом бросании появилось 6 очков, событие B — в результате второго бросания появилось число очков, кратное трем. Найти вероятность события $A\bar{B}$.

406. Дважды бросается игральная кость. Событие A — первый раз выпало четное число очков, событие B — второй раз выпало число очков меньше трех. Найти вероятность события $A\bar{B}$.

407. Вероятность попадания в мишень равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок хотя бы однажды попадет по мишени в результате двух выстрелов?

408. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,3. Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом, если оба стрелка независимо друг от друга выстрелили по ней?

409. В выпущенной заводом партии деталей 2% брака и 0,3 от числа всех деталей окрашены в зеленый цвет. Какова вероятность того, что случайным образом вынутая из партии деталь окажется неокрашенной небракованной деталью?

Упражнения к главе V

410. Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет либо пять, либо шесть очков?

411. Из урны, содержащей 15 белых, 10 красных и 5 синих шаров, наугад извлекается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

412. Одновременно бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.

413. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что не выпадут 3 очка?

414. Брошены монета и игральная кость. Какова вероятность того, что появится «герб» и появятся 6 очков?

415. По мишени стреляют 2 раза. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,8, при втором выстреле — 0,9. Какова вероятность того, что мишень не будет поражена ни одним выстрелом?

416. Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимаются 2 карты и не возвращаются обратно. Найти вероятность того, что: 1) вынуты *два туза*; 2) сначала извлечен *туз*, а затем *дама*; 3) вынуты 2 карты *бубновой масти*; 4) вторым извлечен *туз* при условии, что первой была вынута *дама*.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Бросают 2 монеты. Какова вероятность того, что на обеих монетах выпадет «орел»?

2. Вероятность появления в партии бракованной детали равна 0,05. Какова вероятность того, что наугад извлеченная деталь окажется небракованной?

3. В ящике лежат 2 черных, 3 белых и 10 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый один шар окажется или черного, или белого цвета?

4. В вазе лежат 3 апельсина и 5 яблок. Мальчик не глядя берет из вазы один плод, затем, не возвращая его, берет второй. Найти вероятность того, что первым был взят апельсин, а вторым — яблоко.

5. Вероятность попадания в мишень равна 0,8. Какова вероятность попадания для стрелка по мишени в каждом из двух произведенных выстрелах?

6. Ученик знал ответы на 15 вопросов из 20, которые предлагались к зачету. Ответа на первый попавшийся на зачете вопрос он не знал. Какова вероятность того, что ученик ответит на второй из предложенных ему вопросов?

7. Вероятность попадания по мишени для стрелка равна 0,9. Какова вероятность того, что после двух выстрелов в мишени окажется одна пуля?

---

417. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что 3 очка появятся хотя бы на одной из костей.

418. Игральная кость бросается 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

419*. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две стопки по 26 листов в каждой. Найти вероятность того, что в каждой стопке окажется по два *туза*.

420*. В розыгрыше первенства страны по волейболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников первенства имеется 5 команд высшего класса. Найти вероятность того, что все команды высшего класса попадут в одну и ту же группу.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Теория вероятностей как наука зародилась в XVII в. из потребностей страхового дела, демографии и в связи с запросами распространившихся в Европе азартных игр. В азартных играх (картах, домино, костях и пр.) выигрыш в основном зависел не от искусств игрока, а от случайности. Слово «азарт» и произошло от французского слова *hasard*, означающего «случай», «риск». Богатые люди, увлеченные азартными играми, порой прибегали к помощи математиков для решения проблем, возникающих во время игры. В связи с этим рождением теории вероятностей многие ученые считают 1654 г., в котором происходила переписка двух великих французских ученых *Б. Паскаля* и *П. Ферма* в связи с решением задачи, возникающей при игре в кости.

Ученые XVII в. начали использовать азартные игры как удобные и наглядные модели для исследования понятий теории вероятностей. Первая книга по теории вероятностей называлась «О расчетах в азартной игре» и была опубликована в 1657 г. Ее автор, голландский ученый *X. Гюйгенс*, писал: «...при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории вероятностей глубокой и весьма интересной».

В 1713 г. была опубликована книга известного швейцарского математика *Я. Бернулли* «Искусство предположений», в которой автор изложил основы комбинаторики и аппарата вычисления вероятностей, а также доказал одну из замечательных теорем теории вероятностей, названную впоследствии *теоремой Бернулли*. На доказательство этой теоремы ученый потратил 20 лет жизни, а само доказательство заняло 12 страниц текста. Эта теорема — важный частный случай одного из основных законов теории вероятностей — «*закона больших чисел*», открытого в середине XIX в. русским ученым *П. Л. Чебышевым*. Закон больших чисел имеет широкое практическое применение в вопросах, связанных с определением вероятностей событий, для которых рассчитать точное значение вероятности (в ее классическом понимании) невозможно.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с работами французского математика и астронома *П. Лапласа* (1749—1827), немецкого математика *К. Гаусса*, российских математиков *А. А. Маркова* (1856—1920), *А. М. Ляпунова* (1857—1918) и др. Значительный вклад в теорию вероятностей внесли отечественные ученые нашего времени *А. Н. Колмогоров* (1903—1987), *А. Я. Хинчин* (1894—1959), *Б. В. Гнеденко* (1912—1996) и др.

В настоящее время теория вероятностей продолжает развиваться и находит широкое применение в естествознании, экономике, в производстве и гуманитарных науках.

ГЛАВА VI

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

§ 37. Понятие делимости. Делимость суммы и произведения

Пусть a — целое число ($a \in Z$), m — натуральное число ($m \in N$). Тогда говорят, что *a делится на m*, если существует целое число p ($p \in Z$) такое, что

$$a = mp.$$

Число m называют *делителем* числа a, p — *частным* от деления a на m.

Два натуральных числа m и n называют *взаимно простыми* и пишут $(m, n) = 1$, если единственным общим натуральным делителем этих чисел является число единица.

Например, числа 10 и 51 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 10 являются числа 1, 2, 5, 10, а натуральными делителями числа 51 являются числа 1, 3, 17, 51.

Наибольшее натуральное число, являющееся делителем каждого из натуральных чисел m и n, называют *наибольшим общим делителем* этих чисел и обозначают НОД(m, n).

Например, если $m = 80$, $n = 72$, то НОД(m, n) = 8.

Перечислим свойства делимости суммы (разности) и произведения чисел, считая, что $a \in Z$, $b \in Z$, $m \in N$, $n \in N$.

1. Если a делится на m и b делится на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также делятся на m.

2. Если a и b делятся на m, то при любых целых k и l число $ka + lb$ делится на m.

3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа $a + b$ и $a - b$ не делятся на m.

4. Если a делится на m, а m делится на $k \in N$, то a делится на k.

5. Если a делится на m, а b не делится на n, то ab делится на mn.

6. Если a делится на каждое из чисел m, n, причем m, n — взаимно простые числа, то a делится на их произведение mn.

7. Если a делится на m, то a^k делится на m^k для любого $k \in N$.

Ограничимся доказательством свойства 1. Если целые числа a и b делятся на $m \in N$, то существуют числа $p \in Z$, $q \in Z$ такие, что $a = mp$, $b = mq$, откуда следует, что $a + b = m(p + q)$, $a - b = m(p - q)$, т. е. числа $a + b$ и $a - b$ делятся на m.

Замечание 1. Условие $(m, n) = 1$ в свойстве 6 является существенным: число 24 делится на 6 и 8, но не делится на произведение $6 \cdot 8$ (числа 6 и 8 не являются взаимно простыми).

Задача 1. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 555^7$, $m = 37$;
2) $a = 6^8 + 216^2$, $m = 37$;
3) $a = 47^3 + 70^4 + 21$, $m = 23$;
4) $a = 10^6 + 10$, $m = 11$.

Δ 1) Так как число 111 делится на 37, то и число 555 делится на 37 (свойство 2), откуда следует, что число a делится на 37 (свойство 7).

2) Запишем число a в виде $a = 6^8 + 6^6 = 6^6\,(6^2 + 1)$, где $6^2 + 1 = 37$. Следовательно, число a делится на 37.

3) Запишем число a в виде $a = 47^3 - 1 + 70^4 - 1 + 23$ и воспользуемся формулами $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. Тогда $47^3 - 1$ делится на $47 - 1 = 46$, $70^4 - 1$ делится на 69. Отсюда следует, что каждое из чисел $47^3 - 1$, $70^4 - 1$ делится на 23 и по свойству 1 число a делится на 23.

4) Запишем число a в виде $a = 10^6 - 1 + 11$ и заметим, что $b = 10^6 - 1$ — шестизначное число, все цифры которого — девятки. Такое число делится на 99, а значит, и на 11. Следовательно, $a = b + 11$ делится на 11. ▲

Задача 2. Доказать, что при любом $n \in N$ число $a = n^3 - n$ делится на 6.

Δ Если $n = 1$, то число $a = 0$ делится на 6. Пусть $n > 1$, тогда $a = (n - 1)n(n + 1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и, по крайней мере, одно делится на 2. Итак, a делится на 2 и 3. Так как эти числа являются взаимно простыми, то по свойству 6 число a делится на 6. ▲

Задача 3. Пусть a и b — такие целые числа, что число $c = 4a + 3b$ делится на 17. Доказать, что и число $d = 20a + 49b$ делится на 17.

Δ Воспользуемся равенством

$$d = 5(4a + 3b) + 34b.$$

Так как $4a + 3b$ делится на 17, то $5(4a + 3b)$ делится на 17 (свойство 2). По свойству 1 число d делится на 17 (34 делится на 17). ▲

Задача 4. Доказать, что при любых натуральных m и n число $a = (m + 5n + 3)^5(3m + 7n + 2)^4$ делится на 16.

Δ Если числа m и n либо оба четные, либо оба нечетные, то $3m + 7n + 2$ — четное число, и поэтому $(3m + 7n + 2)^4$ делится на 16. Если одно из чисел m, n четное, а другое нечетное, то $m + 5n + 3$ —

четное число, и поэтому $(m+5n+3)^5$ делится на 32. Следовательно, число a делится на 16 при любых $m \in N$, $n \in N$. ▲

Замечание 2. Принято считать, что целое число a является четным, если оно делится на 2, т. е. имеет вид $a = 2k$, где $k \in Z$. Аналогично, целое число называют нечетным, если оно не делится на 2, т. е. имеет вид $a = 2k - 1$ или $a = 2k + 1$, где $k \in Z$.

Задача 5. Доказать, что квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа имеет вид $4p + 1$, где $p \in Z$.

△ 1) Если a — четное число, то $a = 2k$, где $k \in Z$, откуда следует, что число $a^2 = 4k^2$ делится на 4.

2) Если a — нечетное число, то $a = 2k - 1$, где $k \in Z$, откуда получаем $a^2 = 4(k^2 - k) + 1 = 4p + 1$, где $p \in Z$. ▲

Задача 6. Пусть числа $a = 10n + 3$ и $b = 7n + 1$, где $n \in N$, делятся на m, где $m \in N$, $m \neq 1$. Найти m.

△ Так как a и b делятся на m, то число $c = 7a - 10b = 7(10n + 3) - 10(7n + 1) = 11$ должно делиться на m.

Но единственное натуральное число, не равное единице, на которое делится 11, равно 11. Следовательно, $m = 11$. ▲

Упражнения

421. Доказать, что число $2^{56} + 16^{15}$ делится на 17.

422. Доказать, что число $39^3 + 77^4 + 36$ делится на 19.

423. Доказать, что число $444^{88} + 888^{44}$ делится на 148.

425. Доказать, что число $10^{20} + 37^3 - 2$ делится на 9.

426. Доказать, что число $10^{10} + 10$ делится на 11.

427. Доказать, что при любом $n \in N$ число $n^3 + 11n$ делится на 6.

428. Пусть a и b — такие целые числа, что число $5a + 3b$ делится на 19. Доказать, что число $35a + 59b$ делится на 19.

429. Доказать, что при любых натуральных m и n число $(3m + n + 5)^6(5m + 7n + 2)^5$ делится на 32.

430. Пусть числа $5n + 1$ и $8n + 3$, где $n \in N$, делятся на m, где $m \in N$, $m \neq 1$. Найти m.

§ 38. Деление с остатком. Признаки делимости

Не всякое целое число a делится на данное натуральное число m. Например, число 938 не делится на 3, так как $938 = 936 + 2$, где число 936 делится на 3, а число 2 не делится на 3.

Пусть a и m — натуральные числа такие, что $a > m$, и пусть

$$a = km + r, \qquad (1)$$

где $k \in N$, а r принимает одно из значений 0, 1, ..., $m - 1$. Тогда говорят, что k — *частное*, r — *остаток от деления* a на m, а равенство (1) называют *формулой деления* a *на* m.

Можно показать, что для любых натуральных чисел a и m, где $a > m$, остаток r и частное k существуют и определяются однозначно.

Замечание. Иногда в качестве остатка от деления удобно брать отрицательное число. Например, если $a = 120$, $m = 11$, то $a = 11 \times \times 10 + 10$ и $a = 11 \cdot 11 - 1$, т. е. в качестве остатка от деления можно взять либо 10, либо -1.

Для любого $a \in Z$ деление на натуральное число m определяется равенством (1), в котором $k \in Z$, а r принимает одно из значений 0, 1, ..., $m - 1$.

Например, если $a = -39$, $m = 5$, то $-39 = 5(-8) + 1$.

Задача 1. Найти остаток от деления числа 92^5 на 7.

Δ Так как $92 = 7 \cdot 13 + 1$, то остаток от деления 92 на 7 равен 1. Аналогично из равенства $92^2 = (7 \cdot 13 + 1)^2 = 7p + 1$ и $92^3 = (7p + + 1)(7 \cdot 13 + 1) = 7q + 1$, где $p \in N$, $q \in N$, следует, что $92^5 = 7r + 1$, где $r \in N$. Следовательно, искомый остаток равен 1.

Вообще для любого $n \in N$ остаток от деления числа 92^n на 13 равен 1. $\blacktriangle$

Задача 2. Найти остаток от деления числа $a = 10 \cdot 5^{45}$ на 4.

Δ Так как число 5^{45} оканчивается цифрой 5, то число a можно записать в виде $a = b + 50$, где число b делится на 100, а значит, делится на 4. Поэтому остаток от деления a на 4 равен остатку от деления числа 50 на 4, т. е. равен двум. $\blacktriangle$

Задача 3. Пусть натуральные числа a, b и c не делятся на 3. Доказать, что число $d = a^2 + b^2 + c^2$ делится на 3.

Δ Если число a не делится на 3, то $a = 3p \pm 1$, откуда $a^2 = 3q + 1$, где q — целое число.

Отсюда следует, что $d = 3s + 3$, где $s \in Z$, и поэтому d делится на 3. $\blacktriangle$

Задача 4. Найти остаток от деления на 10 числа $a = 2^{187} + + 3^{372} + 7^{258}$.

Δ Задачу можно сформулировать так: найти последнюю цифру числа a. Найдем последние цифры чисел 2^{187}, 3^{372}, 7^{258}. Выпишем последовательно степени двойки:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64 \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры степеней двойки повторяются через четыре. Поэтому, если $k = 4p + r$, где $p \in N$, r — одно из чисел 1, 2, 3, 4, то последняя цифра числа 2^k совпадает с последней цифрой числа 2^r.

Так как $187 = 4t + 3$, где $t \in N$, т. е. остаток от деления 187 на 4 равен 3, то последняя цифра числа 2^{187} совпадает с последней цифрой числа 2^3 — это цифра 8.

Нетрудно проверить, что последние цифры степеней чисел 3 и 7 повторяются через четыре.

Так как 372 делится на 4, то последняя цифра числа 3^{372} такая же, как и у числа 3^4 — это цифра 1.

Аналогично, пользуясь тем, что остаток от деления числа 258 на 4 равен двум и 7^2 оканчивается цифрой 9, находим: последняя цифра числа 7^{258} — девятка.

Итак, слагаемые числа a имеют последние цифры 8, 1 и 9 соответственно. Поэтому остаток от деления a на 10 равен остатку от деления на 10 суммы $8 + 1 + 9$, т. е. равен восьми. ▲

Задача 5. Найти все целые n, при которых дробь $a = \frac{n^5 + 3n^3 + 3n + 3}{n^2 + 1}$ является целым числом.

△ Представим число a в виде суммы многочлена от n и дроби, числитель которой — многочлен первой степени. С этой целью запишем a в следующем виде:

$$a = \frac{n^3(n^2 + 1) + 2n(n^2 + 1) + n + 3}{n^2 + 1}.$$

Произведя деление, получаем

$$a = n^3 + 2n + \frac{n + 3}{n^2 + 1}.$$

Так как $n^3 + 2n$ — целое число, то число a будет целым тогда и только тогда, когда дробь $\frac{n + 3}{n^2 + 1}$ — целое число. Этому условию удовлетворяют только целые числа -3, -1, 0, 1, 2. ▲

Обратимся к признакам делимости.

Напомним признаки делимости на 10, 5, 4, 3 и 9.

1) Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

2) Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

3) Натуральное число $a > 9$ делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех его цифр, кроме двух последних, делится на 4.

4) Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

5) Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Задача 6. Доказать признак делимости на 9.

Δ Пусть натуральное число a является n-значным. Тогда его можно записать в виде

$$a = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — цифры соответствующих разрядов.

Пусть $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$, т. е. S — сумма цифр числа a. Рассмотрим разность $a - S = (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1}) - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})$. Тогда $a - S = 9a_1 + 99a_2 + \ldots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1}$.

Так как числа $9, 99, \ldots, 10^{n-1} - 1$ составлены из одних девяток, то эти числа делятся на 9.

Поэтому из равенства $a = S + 9k$, где $k \in Z$, следует, что a делится на 9 тогда и только тогда, когда S делится на 9. ▲

Задача 7. Доказать, что число $a = n^5 - n$ делится на 5 при любом $n \in N$.

Δ Если $n = 1$, то число $a = 0$ делится на 5.

Пусть $n > 1$, тогда $a = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Если n делится на 5, то a делится на 5, а если n не делится на 5, то либо $n = 5p \pm 1$, либо $n = 5q \pm 2$, где $p \in Z$, $q \in Z$. Пусть $n = 5p \pm 1$, тогда $n^2 - 1$ делится на 5, а если $n = 5q \pm 2$, то $n^2 + 1$ делится на 5. Таким образом, число a делится на 5 при любом $n \in N$. ▲

Задача 8. Доказать, что число $a = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30 при любом $n \in N$.

Δ Нужно доказать, что число a делится на 2, 3 и 5.

а) Если n — четное число, то a делится на 2, а если n — нечетное число, то a также делится на 2, так как $6n^5 + 10n^3$ делится на 2 и $15n^4 - n$ делится на 2 (разность двух нечетных чисел).

б) Так как $6n^5 + 15n^4 + 9n^3 = b$ делится на 3, $c = n^3 - n$ делится на 3 (§ 37, задача 2), то число $a = b + c$ делится на 3.

в) Заметим, что число $5n^5 + 15n^4 + 10n^3 = d$ делится на 5, а число $n^5 - n$ также делится на 5 (пример 7). Поэтому число $a = d + n^5 - n$ делится на 5 при любом $n \in N$.

Итак, число a делится на 2, 3 и 5. Так как эти числа не имеют общих делителей (кроме единицы), то число a делится на их произведение, т. е. делится на 30. ▲

Упражнения

431. Доказать, что число $n^3 + 20n + 10^5 + 2$ делится на 3 при любом $n \in N$.

432. Найти остаток от деления на 10 числа $2^{87} + 3^{74} + 7^{57}$.

433. Доказать, что натуральные числа m и n делятся на 3, если число $m^2 + n^2$ делится на 3.

434. Доказать, что число $96^{12} - 32^5 - 48^6$ делится на 10.

435. Доказать, что число $786^{10} + 567^5$ делится на 3.

436. Доказать, что число $n^3 + 15n^2 + 8n + 3$ делится на 3 при любом $n \in N$.

437. Доказать, что число $2n^3 - 3n^2 + 7n$ делится на 6 при любом $n \in N$.

438. Найти все целые числа, которые при делении на m и n дают остатки, соответственно равные r_1 и r_2, если:

1) $m = 12$, $n = 33$, $r_1 = 7$, $r_2 = 8$;

2) $m = 15$, $n = 24$, $r_1 = 8$, $r_2 = 9$.

439. Пусть целые числа x и y не делятся на 3. Доказать, что число a делится на 3, если:

1) $a = x^6 - y^6$; 2) $a = x^4 + y^4 + 4$.

440. Выяснить, делится ли на 8 число a, если:

1) $a = 257\,431\,608$; 2) $a = 6\,443\,127\,900$.

441. Найти все $n \in Z$, при которых число a является целым, если:

1) $a = \dfrac{n^4 + 8}{n^2 + 2}$; 2) $a = \dfrac{n^4 + 7}{n^2 + 2}$.

442. Доказать, что при любом $n \in N$, число a делится на 30, если:

1) $a = 36n^5 + 15n^4 + 40n^3 - n$; 2) $a = 66n^5 + 45n^4 + 10n^3 - n$.

443. Найти все такие целые числа x и y, чтобы при любом $n \in N$, число a было бы целым, если:

1) $a = \dfrac{n^3 + nx + y}{n^2 + 1}$; 2) $a = \dfrac{n^3 + n(x - 1) + y}{n^2 + 1}$.

§ 39. Сравнения

Если целые числа a и b при делении на натуральное число m дают равные остатки, то говорят, что эти числа *сравнимы по модулю m*, и пишут

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Иначе говоря, запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность $a - b$ делится на m. В частности, если $a \equiv 0 \pmod{m}$, то число a делится на m.

Например, $96 \equiv 6 \pmod{10}$, $42 \equiv 3 \pmod{13}$, $32 \equiv -1 \pmod{11}$, $90 \equiv -2 \pmod{23}$.

Перечислим основные свойства сравнений.

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$
$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$
$$ac \equiv bd \pmod{m},$$

т. е. сравнения можно складывать, вычитать и перемножать, как и верные числовые равенства. В частности, можно обе части сравнения умножать на одно и то же целое число и возводить в натуральную степень.

3. Если $ak \equiv bk \pmod{m}$, $m \neq 1$, а числа k и m взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{m}$, т. е. обе части сравнения можно сокращать на их общий множитель, если он и модуль m — взаимно простые числа.

Ограничимся доказательством свойства 3.

○ По условию число $ak - bk = k(a - b)$ делится на m. Так как k не делится на m (k и m — взаимно простые числа, $m \neq 1$), то $a - b$ делится на m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$. ●

Задача 1. Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a = 76^{21} + 42^{17} - 8 \cdot 23^{16}$, $m = 10$;

2) $a = 78^{35} + 55^{19}$, $m = 7$.

△ 1) Так как $76 \equiv 6 \pmod{10}$, то $76^{21} \equiv 6^{21} \equiv 6 \pmod{10}$.

Используя результат задачи 4 из § 38, получаем, $42^{17} \equiv 2^{17} \equiv 2 \pmod{10}$, $23^{16} \equiv 3^{16} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

По свойствам сравнений $a \equiv 6 + 2 - 8$, т. е. $a \equiv 0 \pmod{10}$. Это означает, что a делится на 10.

2) Пользуясь тем, что $78 \equiv 1 \pmod 7$, $55 \equiv -1 \pmod 7$, получаем $78^{35} \equiv 1 \pmod 7$, $55^{19} \equiv (-1)^{19} \pmod 7$, т. е. $55^{19} \equiv -1 \pmod 7$. Следовательно, $a \equiv 1 - 1 \pmod 7$, т. е. a делится на 7. ▲

Задача 2. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 23^{45} \cdot 37^{21} \cdot 49^{25}$, $m = 3$;

2) $a = 5 \cdot 2^{73} + 7 \cdot 44^{9}$, $m = 15$.

△ 1) Числа 23, 37 и 49 не делятся на 3. Поэтому их квадраты при делении на 3 дают в остатке единицу, т. е. $23^2 \equiv 37^2 \equiv 49^2 \equiv 1 \pmod 3$, откуда следует, что $23^{46} \equiv 37^{20} \equiv 49^{24} \equiv 1 \pmod 3$.

По свойствам сравнений

$$a \equiv 23 \cdot 37 \cdot 49 \equiv 2 \cdot 1 \cdot 1, \text{ т. е. } a \equiv 2 \pmod 3.$$

Следовательно, искомый остаток равен 2.

2) Так как $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$, а $44 \equiv -1 \pmod{15}$, то $2^{73} = 2 \cdot (2^4)^{18} \equiv 2 \pmod{15}$, $44^9 \equiv -1 \pmod{15}$. Следовательно, $a \equiv 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1)$, т. е. $a \equiv 3 \pmod{15}$.

Поэтому искомый остаток равен 3. ▲

Задача 3. Доказать, что натуральное число $a = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^n a_n$ делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма

$$S = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n.$$

Δ Так как $10 \equiv -1 \pmod{11}$, то

$10^2 \equiv 10^4 \equiv \dots \equiv 10^{2k} \equiv 1 \pmod{11}$ при любом $k \in N$,

$10 \equiv 10^3 \equiv \dots \equiv 10^{2k-1} \equiv -1 \pmod{11}$ при любом $k \in N$.

По свойствам сравнений

$$a \equiv a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

Отсюда следует, что число a делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма S, составленная из цифр соответствующих разрядов, взятых с чередующимися знаками. ▲

Задача 4. Найти все натуральные числа n, при которых число $a = 24n + 9$ делится на 13.

Δ Пользуясь свойствами сравнений, запишем цепочку соотношений:

$$24n + 9 \equiv 0 \pmod{13},\ 8n + 3 \equiv 0 \pmod{13},$$
$$64n \equiv -24 \pmod{13},\ -n \equiv -24 \equiv -11 \pmod{13},$$
$$n \equiv 11 \pmod{13}.$$

Таким образом, число a делится на 13 тогда и только тогда, когда $n - 11 = 13k$, где $k \in N$, т. е. при $n = 11 + 13k$.

Ответ. $n = 11 + 13k$, $k \in N$.

Упражнения

Доказать, что число a делится на число m (**444—445**).

444. 1) $a = (51 \cdot 40)^{16} + (53 \cdot 77)^{13}$, $m = 13$;
2) $a = 2 \cdot 5^{21} + 9 \cdot 6^{10}$, $m = 19$.

445. 1) $a = 5 \cdot 7^{143} + 16^{52} + 3^{130}$, $m = 10$;
2) $a = 3 \cdot 5^{25} + 4^7 \cdot 9^6$, $m = 19$.

Найти остаток от деления числа a на число m (**446—447**).

446. 1) $a = 5 \cdot 4^{31} + 7 \cdot 18^{37}$, $m = 17$;
2) $a = 12^{316}$, $m = 19$.

447. 1) $a = 8^{991} + 5 \cdot 10^5$, $m = 3$;
2) $a = 2^{367} + 40$, $m = 17$.

448. Доказать, что число $28 \cdot 10^{15} - 10 \cdot 18^{13}$ делится на 19.

449. Доказать, что число $100^{20} - 50 \cdot 16^5$ делится на 49.

450. Доказать, что число $42^{365} + 53^{241}$ делится на 5.

§ 40. Решение уравнений в целых числах

Обратимся к линейным уравнениям с двумя неизвестными, т. е. к уравнениям вида

$$ax + by = c. \qquad (1)$$

Предположим, что a, b, c — целые числа, и поставим задачу — найти целочисленные решения уравнения (1), т. е. все пары целых чисел x, y, при которых уравнение (1) обращается в верное числовое равенство, или показать, что таких чисел нет.

Будем считать, что коэффициенты a, b, c уравнения (1) не имеют общего делителя, отличного от единицы (в противном случае разделим обе части уравнения на этот общий делитель).

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a, b. Возможны два случая: $d = 1$, $d \neq 1$.

В первом случае уравнение (1) имеет целочисленные решения, во втором не имеет. Справедливы следующие утверждения.

1. Если коэффициенты a и b уравнения $ax + by = c$ являются взаимно простыми числами ($d = 1$), то это уравнение имеет, по крайней мере, одно целочисленное решение.

2. Если $d \neq 1$, то уравнение $ax + by = c$ не имеет целочисленных решений.

3. Если $d = 1$, то уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечное множество целочисленных решений, которые задаются формулами

$$x = \alpha + bt, \ y = \beta - at, \qquad (2)$$

где $(\alpha; \beta)$ — некоторое целочисленное решение уравнения $ax + by = c$, а t — произвольное целое число.

○ Ограничимся доказательством утверждений 2 и 3.

а) Докажем утверждение 2. Пусть уравнение (1) имеет целочисленное решение. Тогда существуют целые числа x и y, которые обращают уравнение (1) в верное числовое равенство.

Так как d — наибольший общий делитель чисел a и b, причем $d \neq 1$, то $a = md$, $b = nd$, где m и n — целые числа, не имеющие общих натуральных делителей, отличных от единицы (m и n — взаимно простые числа).

Тогда равенство (1) примет вид $dmx + dny = c$, или

$$d(mx + ny) = c. \qquad (3)$$

По предположению числа a, b, c не имеют общего делителя, отличного от единицы. Но из равенства (3) следует, что c делится на d, где $d \neq 1$, т. е. a, b и c имеют общий делитель $d \neq 1$.

Полученное противоречие означает, что уравнение (1) при $d \neq 1$ не может иметь целочисленных решений.

б) Докажем утверждение 3, опираясь на утверждение 1. Пусть $(\alpha; \beta)$ — целочисленное решение уравнения (1), тогда является верным равенство

$$a\alpha + b\beta = c. \tag{4}$$

Если $(x; y)$ — произвольное целочисленное решение уравнения (1), то равенство (1) является верным. Вычитая почленно из равенства (1) равенство (4), получаем

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда следует, что

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a}. \tag{5}$$

Число α — целое и, кроме того, a и b — взаимно простые числа. Поэтому число x, определяемое формулой (5), будет целым тогда и только тогда, когда $\beta - y$ делится на a. Обозначим

$$t = \frac{\beta - y}{a}, \tag{6}$$

тогда t — целое число, и равенство (5) примет вид

$$x = \alpha + bt,$$

а из (6) следует, что

$$y = \beta - at.$$

Таким образом, доказано, что если $(\alpha; \beta)$ — какое-либо целочисленное решение уравнения (1), то все решения этого уравнения задаются формулами (2), где $t \in \mathbb{Z}$. ●

Замечание. Если $(x_1; y_1)$ — целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$, то $(cx_1; cy_1)$ является целочисленным решением уравнения (1), так как из верного равенства $ax_1 + by_1 = 1$ следует верное равенство

$$a(cx_1) + b(cy_1) = c.$$

Это утверждение часто оказывается полезным при отыскании решения уравнения (1).

З а д а ч а 1. Доказать, что уравнение $32x + 56y = 17$ не имеет целочисленных решений.

△ Левая часть уравнения при любых целых x и y является четным числом, а правая — нечетным. Поэтому уравнение не может иметь целочисленных решений. К этому же выводу можно прийти, применяя утверждение 2. ▲

З а д а ч а 2. Найти все целочисленные решения уравнения $7x + 11y = 4$.

△ Рассмотрим уравнение $7x + 11y = 1$. Оно имеет целочисленное решение $(-3; 2)$. Поэтому (см. замечание к утверждениям 1–3) исходное уравнение имеет целочисленное решение $(-12; 8)$, а все целочисленные решения этого уравнения задаются формулами (2), т. е.

$$x = -12 + 11t,\ y = 8 - 7t,\ t \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x = -12 + 11t$, $y = 8 - 7t$, $t \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Задача 3. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 = y^2 + 11$.

Δ Запишем уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 11$.

Так как делителями правой части уравнения являются пары чисел 1, 11 и −1, −11, то совокупность всех целочисленных решений уравнения совпадает с множеством всех целочисленных решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 11, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -11; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -11, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все целочисленные решения исходного уравнения.

Ответ. (6; 5), (6; −5), (−6; −5), (−6; 5). ▲

Замечание. Из уравнения следует, что если найдено одно его целочисленное решение, то остальные три решения можно получить из этого решения, используя равенство $(-a)^2 = a^2$.

Задача 4. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 2006$ не имеет целочисленных решений.

Δ Запишем уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 2006$.

а) Если числа x и y являются одновременно четными или нечетными, то числа $x - y$ и $x + y$ — четные, и поэтому левая часть уравнения в этом случае делится на 4. Но правая часть не делится на 4. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение не имеет целочисленных решений.

б) Если одно из чисел x, y четное, а другое нечетное, то $x + y$ и $x - y$ — нечетные числа, и поэтому левая часть уравнения — число нечетное, тогда как правая часть уравнения — четное число. Следовательно, и в этом случае уравнение не имеет целочисленных решений. ▲

Задача 5. Найти все целочисленные решения уравнения

$$3x^2 + 8xy - 16y^2 = 19.$$

Δ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$3x^2 + 8xy - 16y^2 = 3x^2 - 4xy + 12xy - 16y^2 =$$
$$= x(3x - 4y) + 4y(3x - 4y) = (3x - 4y)(x + 4y).$$

Тогда уравнение примет вид

$$(3x - 4y)(x + 4y) = 19.$$

Так как делителями числа 19 являются числа ±1, ±19, то искомое множество решений содержится в множестве всех целочисленных решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases}3x-4y=19,\\ x+4y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}3x-4y=1,\\ x+4y=19;\end{cases}\quad \begin{cases}3x-4y=-19,\\ x+4y=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}3x-4y=-1,\\ x+4y=-19.\end{cases}$$

Первая и третья из этих систем имеют целочисленные решения $(5; -1)$ и $(-5; 1)$, остальные не имеют целочисленных решений.

Ответ. $(5; -1)$, $(-5; 1)$. ▲

Задача 6. Найти целочисленные решения уравнения $2x^2y^2 + x^2 = 14y^2 + 25$.

△ Выражая из уравнения x^2 через y^2, запишем его в виде $x^2 = 7 + \frac{18}{2y^2+1}$.

Если $y = 0$, то $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Если $y^2 = 1$, то $x^2 = 13$, а если $y^2 = 4$, то $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. При других целых значениях y знаменатель дроби $\frac{18}{2y^2+1}$ больше числителя. Итак, уравнение имеет шесть целочисленных решений:

$(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$. ▲

Задача 7. Найти все целочисленные решения системы уравнений $\begin{cases}17x^2+8xy+y^2=2,\\ x^2+y^2-2x+8y+16=0.\end{cases}$

△ Запишем второе уравнение в виде: $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1$.

Из этого уравнения следует, что $(x-1)^2 \leqslant 1$ или $|x-1| \leqslant 1$. Неравенству $|x-1| \leqslant 1$ удовлетворяют целые числа $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Если $x = 0$, то из второго уравнения находим $y = -4$. Пара чисел $(1; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Если $x = 1$, то $|y + 4| = 1$, откуда находим $y_1 = -5$, $y_2 = -3$. Обе пары чисел $(1; -5)$ и $(1; -3)$ удовлетворяют первому уравнению системы.

Наконец, если $x = 2$, то $y = -4$. Пара чисел $(2; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Ответ. $(1; -5)$, $(1; -3)$. ▲

Упражнения

Найти все целочисленные решения уравнения (451—453).

451. 1) $42x - 16y = 37$; 2) $3x + 6y = 17$.

452. 1) $7x + 15y = 3$; 2) $11x + 16y = 5$.

453. 1) $10x + 21y = 1$; 2) $21x + 4y = 3$.

Доказать, что не имеет целочисленных решений уравнение (454—455).

454. 1) $y^2 = 3x + 5$; 2) $x^2 = 9y + 8$.

455. 1) $x^2 = y^2 + 1998$; 2) $x^2 - 2y^2 = 204$.

Найти все целочисленные решения уравнения (456—457).

456. 1) $5x^2 + 8xy - 4y^2 = 17$; 2) $5y^2 - 8xy - 4x^2 = 17$.

457. 1) $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$;
2) $3xy + 19x + 10y + 55 = 0$.

458. Найти все целочисленные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 8xy + 17y^2 = 2, \\ x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0. \end{cases}$

Упражнения к главе VI

459. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 10^8 + 28^3 - 2$, $m = 9$;
2) $a = 16^3 + 31^4 - 17$, $m = 15$.

460. Доказать, что число $(3n + m + 5)^6(n + 5m + 2)^7$ делится на 64 при любых $n \in N$, $m \in N$.

461. Доказать, что число $13n^2 - 7n$ делится на 6 при любых $n \in N$.

462. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

463. Доказать, что число $n^7 - n$ делится на 7 при любом $n \in N$.

464. Найти остаток от деления числа a на m, если:
1) $a = 17^{25} \cdot 31^{11} \cdot 47^{13}$, $m = 3$;
2) $a = 2^{127} + 18^{21}$, $m = 17$.

465. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 42^{365} + 53^{241}$, $m = 5$;
2) $a = 71^{325} + 41^{135}$, $m = 7$.

Найти целочисленные решения уравнения (466—467).

466. 1) $5x + 3y = 4$; 2) $5x + 7y = 2$.

467. 1) $3xy + 10x - 13y = 35$;
2) $3xy - 10x + 16y = 45$.

468. Доказать, что не имеет решений в целых числах уравнение:

1) $2001x^2 + 2002 = y^2$; 2) $2002x^2 + 2003 = y^2$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Доказать, что число $47^4 + 93^3 + 21$ делится на 23.
2. Найти остаток от деления на 10 числа $2^{87} + 3^{70} + 7^{57}$.
3. Доказать, что при любом $n \in N$ число $7n^3 - 13n$ делится на 6.
4. Найти остаток от деления на 3 числа $25^{13} + 17^8$.
5. Найти целочисленные решения уравнения $7x + 3y = 2$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Можно считать, что простые числа являются основой всех целых чисел, так как любое из них можно записать в виде произведения простых чисел. Особое место среди целых чисел занимает единица. Многие века число 1 считалось особым: некоторые древние математики вообще не считали единицу числом, многие же математики вплоть до VIII в. считали ее простым числом. Сегодня для выстраивания теории чисел число 1 считают особым числом, не относящимся ни к простым, ни к составным числам.

Основной задачей теории делимости считается задача выяснения делимости одних целых чисел на другие, нахождения остатков от деления этих чисел. В основе теории делимости лежит утверждение, доказанное французским ученым Б. Паскалем (1623—1662): «Пусть натуральное число $n > 1$ записано в q-ичной системе:

$$n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0.$$

Обозначим через r_s остаток от деления q^s на $p > 1$ ($s = 1, 2, \ldots, k$) и составим число

$$m = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \ldots + a_1 r + a_0,$$

тогда числа m и n имеют одинаковые остатки при делении на p».

Рассмотренную в главе теорию сравнений (которую также называют арифметикой сравнений, арифметикой остатков или арифметикой вычетов) разработал немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855). Отметим, что для Ферма и Эйлера попытки создания в свое время такой теории не увенчались успехом.

ГЛАВА VII **МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

§ 41. Многочлены и арифметические действия над ними

Многочленом (*полиномом*) от одной переменной x называется выражение вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$.

Число n называется *степенью* многочлена $P(x)$. Форма (1) называется *канонической* или *стандартной записью многочлена* n-й степени. Слагаемое a_0x^n называется *старшим членом* многочлена $P(x)$, a_0 — *старшим коэффициентом*, а a_n — его *свободным членом*. Многочлен $P(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$ — заданное число, называют *многочленом нулевой степени*. Многочлен $P(x) = 0$ называют *нулевым многочленом*.

Коэффициенты многочлена могут быть как действительными, так и комплексными числами. В дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать только многочлены с действительными коэффициентами (чаще всего с целыми коэффициентами); вместо x будем подставлять действительные, а в некоторых случаях — комплексные числовые значения.

Пусть c — некоторое число (действительное или комплексное). *Значением* многочлена (1) при $x = c$ называется число $P(c)$, которое получится, если в (1) вместо x подставить число c и произвести указанные действия. Например, многочлен

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

принимает при $x = 2$ значение 1, так как

$$Q(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = 1.$$

Отметим, что $P(0) = a_n$, $P(1) = a_0 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$, т. е. значение произвольного многочлена $P(x)$ при $x = 0$ равно свободному члену этого многочлена, а значение многочлена при $x = 1$ равно сумме всех коэффициентов этого многочлена.

Выражения вида ax^k, где a — действительное, а k — неотрицательное целое число, называют *одночленом*. Одночлены одинаковой степени называют *подобными*.

Два многочлена считаются *равными*, если их каноническая запись одинакова, т. е. коэффициенты этих многочленов соответственно равны. Иными словами, если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad (2)$$

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m \qquad (3)$$

— два многочлена в канонической записи, то по определению равенство $P(x) = Q(x)$ имеет место в том и только в том случае, если $m = n$ и коэффициенты многочленов соответственно равны, т. е. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ и т. д.

Из этого определения следует, что *если $P(x)$ и $Q(x)$ — равные многочлены* (т. е. многочлены, имеющие одинаковую каноническую запись), *то для любого числа c значения этих многочленов при $x = c$ совпадают*, т. е. $P(c) = Q(c)$.

Справедливо и обратное утверждение: если для любого числа c выполняется равенство $P(c) = Q(c)$, то $P(x) = Q(x)$.

Можно доказать (об этом будет сказано в § 44), что справедлива следующая теорема, существенно усиливающая приведенное выше утверждение.

Теорема. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, степень каждого из которых не превосходит n. Тогда, если значения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают в $(n + 1)$ точках (эти точки различны), то $P(x) = Q(x)$.

Сумма, разность и произведение двух многочленов также являются многочленами. Пусть даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, определяемые формулами (2) и (3).

Суммой этих многочленов называется многочлен, полученный сложением одночленов, составляющих многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, и приведением подобных членов.

Произведением многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ называется многочлен, составленный из произведений всех членов многочлена $P(x)$ на все члены многочлена $Q(x)$.

Задача 1. Найти сумму и произведение многочленов $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 2$ и $Q(x) = x^2 + x - 3$.

Δ 1) $P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 2 + x^2 + x - 3 = 3x^3 + 3x^2 - 5$.

2) $P(x)Q(x) = (3x^3 + 2x^2 - x - 2)(x^2 + x - 3) = 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x^3 - x^2 + 3x - 2x^2 - 2x + 6 = 3x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 9x^2 + x + 6$. $\blacktriangle$

Задача 2. Найти неизвестные коэффициенты a, b, c, при которых будет выполняться следующее равенство:

$$8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = (2x + 3)(ax^3 + bx^2 + cx - 1) - 7x^3 + 4.$$

Δ Перемножая многочлены в правой части равенства и приводя подобные члены, получаем

$$8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 =$$
$$= 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 2x + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - 3 - 7x^3 + 4 =$$
$$= 2ax^4 + (2b + 3a - 7)x^3 + (2c + 3b)x^2 + (3c - 2)x + 1.$$

Из определения равенства многочленов следует, что

$$\begin{cases} 2a = 8, \\ 2b + 3a - 7 = -1, \\ 2c + 3b = -5, \\ 3c - 2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$. ▲

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(x) + T(x)$. Многочлен $Q(x)$ называют *разностью многочленов* $P(x)$ и $T(x)$. Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ существует и притом только один многочлен $Q(x)$, являющийся их разностью. Он записывается в виде $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Замечание. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, a_0 и b_0 — их старшие коэффициенты, $P(x) + Q(x) = S(x)$, $P(x) - Q(x) = T(x)$, $P(x)Q(x) = R(x)$. Тогда степень каждого из многочленов $S(x)$ и $T(x)$ не превосходит наибольшего из чисел n и m, степень многочлена $R(x)$ равна $n + m$, а старший коэффициент многочлена $R(x)$ равен a_0b_0.

Задача 3. Дан многочлен $R(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)^2(x^2 - x + 1)^3$. Найти:

1) свободный член многочлена $R(x)$;

2) сумму коэффициентов многочлена $R(x)$;

3) значение многочлена $R(x)$ при $x = 2$.

△ 1) Свободный член многочлена $R(x)$ равен $R(0)$, где $R(0) = (-5)^2 1^3 = 25$.

2) Сумма коэффициентов многочлена $R(x)$ равна $R(1)$, где $R(1) = (2 - 3 + 4 - 5)^2(1 - 1 + 1)^3 = 4$.

3) $R(2) = (2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 5)^2(4 - 2 + 1)^3 = 49 \cdot 27 = 1323$. ▲

Задача 4. Доказать, что при любых $n \in N$, $m \in N$ верны равенства:

1) $(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n)(x - a) = x^{n+1} - a^{n+1}$; (4)

2) $(x^{2m} - ax^{2m-1} + a^2x^{2m-2} + \ldots + a^{2m-2}x^2 - a^{2m-1}x + a^{2m})(x + a) = x^{2m+1} + a^{2m+1}$. (5)

△ Доказательство формул (4) и (5) можно получить, выполнив действие умножения многочленов.

Приведем другое решение, используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии:

$$1 + t + \ldots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, \ t \neq 1.$$

Отсюда, полагая $t = \frac{a}{x}$, получаем

$$\left(1 + \frac{a}{x} + \ldots + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n}\right)\left(1 - \frac{a}{x}\right) = 1 - \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}. \qquad (6)$$

Умножив обе части равенства (6) на x^{n+1}, получим формулу (4).

Заменяя в равенстве (4) n на $2m$, a на $-a$, получим формулу (5). ▲

Упражнения

469. Найти сумму коэффициентов многочлена

$$P(x) = (1 + 2x - 4x^2)^{248}(1 - 5x + 3x^2)^{75}.$$

470. Найти свободный член многочлена

$$(2x^2 - 5x + 6)(4x^4 - 3x^3 - 2)^5.$$

471. Найти коэффициент при x^3 многочлена

$$(3x^2 - 4x + 5)(x^3 - 2x^2 + 3x - 1).$$

472. Найти значение $\frac{P(1) - P(-1)}{10}$, если

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 11x^{10}.$$

473. Найти числа a, b, c, при которых справедливо равенство

$$3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x + 2 = (ax^3 + bx^2 - x + c)(x + 1).$$

474. Найти значение многочлена $P(x)$ при $x = c$, если

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 29,\ c = -3 - \sqrt[3]{2}.$$

§ 42. Деление многочленов. Схема Горнера

Особое место в теории многочленов занимает деление одного многочлена на другой.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$. Если существует такой многочлен $Q(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x), \qquad (1)$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $T(x)$ или $T(x)$ *делит* $P(x)$, а формулу (1) называют *формулой деления многочленов*, многочлен $Q(x)$ называют *частным*.

Простые примеры показывают, что один многочлен делится на другой не всегда. Например, многочлен $x^2 + 3$ не делится на многочлен $x + 1$. Действительно, в противном случае имело бы место равенство $x^2 + 3 = (x + 1) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Но при $x = -1$ левая часть этого равенства принимает значение 4, а правая — значение 0. Следовательно, написанное соотношение не может иметь места ни при каком $Q(x)$.

Итак, в множестве многочленов деление осуществимо не всегда. Однако имеет место более общая операция, называемая *делением с остатком*.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$ степени $m \geqslant 1$, где $m \leqslant n$. Говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком, если найдутся такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{2}$$

где многочлен $Q(x)$ — (*неполное*) *частное*, степень которого $k = n - m$; а $R(x)$ — *остаток*, степень которого $p < m$.

Тождественное равенство (2) называют *формулой деления многочленов с остатком*.

Если остаток $R(x) = 0$, то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится нацело* на многочлен $T(x)$.

Справедлива следующая теорема о делении многочленов с остатком.

Теорема. Для любых многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x) \neq 0$, существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что выполняется равенство $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$.

Пара многочленов, удовлетворяющих условиям теоремы, единственна.

Задача 1. Показать, что многочлен $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 5x - 2$ делится на $x - 2$ и найти частное.

Δ Преобразуем многочлен $P(x)$, выделяя слагаемые вида $ax^2(x - 2)$, $bx(x - 2)$, $c(x - 2)$. Получим $P(x) = 3x^2(x - 2) - 2x(x - 2) + x - 2$, откуда $P(x) = (x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$.

Таким образом, многочлен $P(x)$ представлен в виде (1), где $T(x) = x - 2$, $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$ — частное. $\blacktriangle$

Деление многочлена $P(x)$ можно выполнить, используя метод деления уголком. Данный метод состоит в следующем.

1) Первое слагаемое частного ($3x^2$) получаем делением старшего члена делимого ($3x^3$) на старший член делителя (x).

2) Найденное первое слагаемое частного $3x^2$ умножаем на делитель ($x - 2$), результат умножения $3x^3 - 6x^2$ записываем под делимым и вычитаем столбиком из делимого; в результате получаем первый остаток $-2x^2 + 5x - 2$.

3) Первый остаток делим на $x - 2$ (делитель) и повторяем процедуру, описанную в п. 1) и 2).

Приведем запись деления.

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3-8x^2+5x-2 & x-2 \\ \underline{3x^3-6x^2} & \overline{3x^2-2x+1} \\ -\,-2x^2+5x-2 & \\ \underline{-2x^2+4x} & \\ -\,x-2 & \\ \underline{x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Замечание. Для нахождения частного можно использовать метод неопределенных коэффициентов, полагая $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Так как старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 3, то $a = 3$. Кроме того, свободный член многочлена $P(x)$ равен $P(0) = -2$.

Так как $P(0) = Q(0) \cdot T(0) = c \cdot (-2)$, то $c = 1$.

Для нахождения b следует приравнять коэффициенты при x в равенстве

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(3x^2 + bx + 1).$$

Получим $5 = 1 - 2b$, откуда $b = -2$.

Задача 2. Выполнить деление с остатком многочлена $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$ на многочлен $T(x) = x^2 + 2x - 3$.

Δ Используем метод деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-3x^3+2x^2+x-5 & x^2+2x-3 \\ \underline{x^4+2x^3-3x^2} & \overline{x^2-5x+15} \\ -\,-5x^3+5x^2+x-5 & \\ \underline{-5x^3-10x^2+15x} & \\ -\,15x^2-14x-5 & \\ \underline{15x^2+30x-45} & \\ -44x+40 & \end{array}$$

Здесь частное равно $x^2 - 5x + 15$, а остаток равен $-44x + 40$. Таким образом,

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5}_{\text{делимое}} = \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{\text{делитель}}\underbrace{(x^2 - 5x + 15)}_{\text{частное}} + \underbrace{(-44x + 40)}_{\text{остаток}}. \blacktriangle$$

Задача 3. Многочлен $P(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 3, а при делении на $x - 2$ — остаток 4. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x - 2)$.

Δ Пусть $R(x)$ — искомый остаток. Тогда $R(x) = ax + b$, так как степень делителя равна двум. В этом случае формула (2) имеет вид

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)T(x) + ax + b. \tag{3}$$

По условию

$$P(x) = (x - 1)A(x) + 3, \tag{4}$$

$$P(x) = (x - 2)B(x) + 4. \tag{5}$$

Подставляя $x = 1$ в формулы (3) и (4), получаем

$$P(1) = a + b = 3. \tag{6}$$

Аналогично, из формул (3) и (5) при $x = 2$ находим

$$P(2) = 2a + b = 4. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) находим $a = 1$, $b = 2$. Следовательно, искомый остаток равен $x + 2$. ▲

Деление многочлена на многочлен можно выполнить, используя так называемую схему Горнера.

Рассмотрим деление многочлена $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$ ($a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$) на двучлен $x - c$. Разделив с остатком, получим

$$P(x) = (x - c)Q(x) + R, \tag{8}$$

где неполное частное — многочлен

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

степени $n - 1$, а остаток R — число.

Из равенства (8) следует, что

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ &= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - c) + R = \\ &= b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + (b_2 - cb_1)x^{n-2} + \ldots \\ &\ldots + (b_{n-1} - cb_{n-2})x + (R - cb_{n-1}). \end{aligned}$$

По определению равенства многочленов

$$b_0 = a_0,\ b_1 = cb_0 + a_1,\ \ldots,\ b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1},\ R = cb_{n-1} + a_0.$$

Такая цепочка для вычисления коэффициентов b_i и R записывается в виде таблицы, заполняемой слева направо.

Коэффициенты делимого $P(x)$

	a_0	a_1	...	a_k	...	a_{n-1}	a_n
Число c	$\underbrace{a_0}_{= b_0}$	$\underbrace{cb_0 + a_1}_{= b_1}$	...	$\underbrace{cb_{k-1} + a_k}_{= b_k}$	...	$\underbrace{cb_{n-2} + a_{n-1}}_{= b_{n-1}}$	$\underbrace{cb_{n-1} + a_0}_{= R}$

Коэффициенты частного $Q(x)$ Остаток R

Эта таблица называется *схемой Горнера*.

В первой строке этой таблицы записываются последовательно коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n многочлена $P(x)$. Слева во второй строке стоит число c, а далее в клетках строки последовательно идут коэффициенты многочлена-частного $Q(x)$ и остаток R. Вторая строка заполняется по следующему правилу.

В первую клетку надо записать число a_0 из первой клетки первой строки. Во вторую клетку надо записать число a_1 из второй клетки первой строки и прибавить к нему произведение числа c на предшествующий элемент (число $b_0 = a_0$) второй строки. Каждая следующая клетка второй строки заполняется аналогичным образом: к стоящему над ней числу первой строки прибавляется произведение числа c на предшествующее число второй строки.

Задача 4. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x + 2$ на двучлен $x - 3$.

Δ Воспользуемся для решения схемой Горнера. Заполним таблицу

Коэффициенты делимого $P(x)$

	2	0	-5	0	-8	2
3	2	$2\cdot3+0=6$	$3\cdot6-5=13$	$3\cdot13+0=39$	$3\cdot39-8=109$	$3\cdot109+2=329$

c — Коэффициенты частного $Q(x)$ — Остаток R

Получаем частное $Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 39x + 109$ и остаток $R = 329$, т. е. $P(x) = (2x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 39x + 109)(x - 3) + 329$. $\blacktriangle$

Отметим некоторые следствия из полученной выше схемы Горнера.

Следствие 1. Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ и c — рациональные числа, то $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ и R — также рациональные числа.

Следствие 2. Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ и c — целые числа, то $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ и R — также целые числа.

Следствие 3. Многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - x_0$ тогда и только тогда, когда его значение при $x = x_0$ равно нулю, т. е. $P(x_0) = 0$.

Упражнения

475. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $T(x) = x - 1$;
2) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$, $T(x) = x - 2$.

Найти частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$ (476—477).

476. 1) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 4$, $T(x) = 2x + 3$;
2) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 12x$, $T(x) = 3x - 2$.

477. 1) $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 1$, $T(x) = x^2 + 2x + 2$;
2) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 16x^2 - 4x + 9$, $T(x) = 2x^2 - x - 1$.

478. Многочлен $P(x)$ при делении на двучлен $3x - 2$ дает в остатке 2, а при делении на двучлен $x + 2$ дает в остатке -10. Найти остаток $R(x)$ от деления $P(x)$ на $(3x - 2)(x + 2)$.

479. Не проводя деления, найти остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x) = x^{20} + x^{15} + 4$ на многочлен $T(x) = x^2 - 1$.

480. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x + 1$, $x - 2$, $x - 3$ равны соответственно 3, 1, −1. Найти остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен

$$T(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

481. Применяя схему Горнера, найти частное $Q(x)$ и остаток R при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - c$, если:

1) $P(x) = -9x^7 + 13x^4 + 14x - 4$, $c = -1$;
2) $P(x) = x^6 + 9x^4 + 16x^2 - 10$, $c = 2$.

§ 43. Алгебраическое уравнение и его корни. Теорема Безу

Число c называется *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(c) = 0$.

Алгебраическим уравнением называется уравнение

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ — многочлен.

Если $P(x)$ — многочлен n-й степени, то уравнение (1) называют *алгебраическим уравнением* n-й степени.

При решении алгебраических уравнений часто применяется следующая теорема, которую называют *теоремой Безу*.

Теорема 1 (Безу). Остаток R от деления многочлена $P(x)$ на $x - c$ равен $P(c)$, т. е. равен значению этого многочлена при $x = c$.

○ Воспользуемся формулой деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - c$, т. е. формулой

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x),$$

где остаток $R(x)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $x - a$, т. е. равна нулю. Поэтому $R(x)$ является числом, т. е. $R(x) = R$. Итак,

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R. \tag{2}$$

Подставляя в равенство (2) вместо x значение c, получаем

$$R = P(c). \ ●$$

Теорема 2 (следствие теоремы 1).
Число c является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится (нацело) на двучлен $x - c$, т. е.

$$P(x) = Q(x)(x - c). \tag{3}$$

○ Пусть $x = c$ — корень многочлена $P(x)$, т. е. $P(c) = 0$. По теореме Безу $P(c) = R$. Следовательно, $R = 0$, и из формулы (2) следует равенство (3). Это означает, что многочлен $P(x)$ делится на $x - c$ нацело.

Пусть $R = 0$, тогда из (2) следует, что справедливо равенство (3), из которого при $x = c$ получаем $P(c) = 0$, т. е. c — корень многочлена $P(x)$. ▲

З а д а ч а 1. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - c$, если:

1) $P(x) = (2x^3 - 4x + 5)^2(2x + 3)^3$, $c = 1$;

2) $P(x) = (4x^4 - 3x^2 + 1)^3(x - 1)^4$, $c = -1$.

△ 1) По теореме Безу $R = P(1) = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$.

2) $R = P(-1) = 2^3 \cdot 2^4 = 128$. ▲

З а д а ч а 2. Выяснить, делится ли нацело многочлен $P(x)$ на многочлен $T(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 10$, $T(x) = x - 2$.

2) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, $T(x) = x^2 - x - 2$.

△ 1) Так как $P(2) = 8 - 20 + 22 - 10 = 0$, то по теореме 2 многочлен $P(x)$ делится на $x - 2$.

2) Так как $T(x) = (x + 1)(x - 2)$, $P(-1) = 0$, $P(2) = 0$, то по теореме 2 многочлен $P(x)$ делится и на $(x + 1)$ и на $(x - 2)$, а потому делится на $T(x)$. ▲

При нахождении целых корней алгебраического уравнения часто оказывается полезным следующее утверждение.

Теорема 3. Если все коэффициенты многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

являются целыми числами, то всякий целый корень этого многочлена является делителем свободного члена a_n.

○ В самом деле, пусть c — целый корень многочлена $P(x)$, т. е.

$$P(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n = 0.$$

Тогда

$$a_n = -c(a_0c^{n-1} + a_1c^{n-2} + \dots + a_{n-1}).$$

Так как число, стоящее в скобках, является целым (ибо все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ и число c — целые), то a_n делится на c. ●

З а д а ч а 3. Решить уравнение

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0.$$

△ Обозначим $P(x)$ левую часть уравнения.

Делителями свободного члена 10 многочлена $P(x)$ являются числа ±1, ±2, ±5, ±10.

Легко проверить, что $P(-1) = P(2) = 0$ и поэтому -1 и 2 — корни уравнения, а многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $T(x) = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$.

Разделив $P(x)$ на $T(x)$, например уголком, найдем частное $Q(x) = x^2 - 5$.

Так как корнями многочлена $Q(x)$ являются числа $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$, то множество корней уравнения состоит из чисел -1, 2, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$.

Ответ. -1, 2, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$. ▲

Упражнения

482. Найти остаток от деления многочлена

$$4x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \text{ на } x - 2.$$

483. Найти остаток от деления многочлена

$$(x^3 - 2x^2 + 5)^3(2x + 1)^5 \text{ на } x + 1.$$

484. Выяснить, делится ли многочлен

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 26x - 11 \text{ на } x + 2.$$

485. Выяснить, делится ли многочлен

$$2x^5 - x^3 + x^2 - x - 1 \text{ на } x^2 - 1.$$

Решить уравнение (**486—488**).

486. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

487. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$.

488. $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.

489. Один из корней уравнения $x^3 - 3x^2 + ax - 6 = 0$ равен 2. Найти a и два других корня этого уравнения.

490. Уравнение $2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Найти третий корень этого уравнения.

§ 44. Разложение многочлена на множители

Обратимся к вопросу о разложении многочлена на множители и связанному с ним вопросу о числе корней алгебраического уравнения. Основной здесь является следующая теорема.

Теорема 1. Любой многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$, $n > 0$, может быть представлен в виде

$$P(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n). \qquad (1)$$

Это разложение единственно (если не учитывать порядок расположения сомножителей).

Доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме, которую называют *основной теоремой алгебры*.

Теорема 2. Любой многочлен $P(x)$, степень которого отлична от нуля, имеет, по крайней мере, один корень.

В этой теореме коэффициенты многочлена и его корни могут быть действительными или комплексными числами.

Из теоремы 1 следует, что если многочлен $P(x)$ представлен в виде (1), то числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются его корнями и других корней этот многочлен не имеет.

Среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ могут быть и равные. Если среди них число c встречается k раз, а все остальные числа отличны от c, то c называют корнем многочлена $P(x)$ *кратности* k или k-кратным корнем этого многочлена.

Если каждый корень многочлена $P(x)$ считать столько раз, какова его кратность, то теорему 2 можно сформулировать так: каждое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней.

Обратимся теперь к теореме, сформулированной в § 41, и докажем ее.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, степень каждого из которых не превосходит n, и пусть выполнены соотношения

$$P(c_1) = Q(c_1),\ P(c_2) = Q(c_2),\ \dots,\ P(c_{n+1}) = Q(c_{n+1}),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ — различные числа. Тогда многочлен $f(x) = P(x) - Q(x)$ обращается в нуль в $n + 1$ точках $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$, т. е. имеет не меньше $n + 1$ корней. Заметим теперь, что степень многочлена $f(x)$ не превосходит n. Если бы этот многочлен был отличен от нуля и имел степень k, то уравнение $f(x) = 0$ имело бы ровно k корней (считая их кратности), т. е. имело бы не больше n корней. Но это противоречит сказанному ранее. Следовательно, многочлен $f(x) = P(x) - Q(x)$ равен *нулю*, т. е. $P(x) = Q(x)$.

В заключение рассмотрим вопрос о представлении многочлена n-й степени с действительными коэффициентами в виде произведения многочленов вида

$$(x - a)^k \text{ и } (x^2 + px + q)^l, \qquad (2)$$

где a, p, q — действительные числа, $p^2 - 4q < 0$, k, l — натуральные числа.

Пусть $Q(x) = x^2 + px + q$ — многочлен второй степени (квадратный трехчлен) с действительными коэффициентами и пусть $D = p^2 - 4q < 0$. Тогда корнями уравнения $Q(x) = 0$ являются (см. § 25) комплексно сопряженные числа

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \text{ и } x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

и других корней многочлен $Q(x)$ не имеет.

Это утверждение остается в силе и для многочлена степени $n \geqslant 2$ с действительными коэффициентами, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $x_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) — комплексный корень многочлена $P_n(x)$ степени $n > 2$ с действительными коэффициентами, то число $\overline{x}_0 = \alpha - i\beta$ также является корнем этого многочлена.

Для доказательства этого утверждения следует воспользоваться свойствами комплексно сопряженных чисел: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Пусть $x = a$ — действительный корень кратности k многочлена $P_n(x)$ степени $n \geqslant 2$ с действительными коэффициентами. Тогда многочлен $P_n(x)$ делится на $(x - a)^k$ и его можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - a)^k Q(x),$$

где a_0 — старший коэффициент многочлена $P_n(x)$, $Q(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, для которого число a не является корнем.

Пусть $x_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) — комплексный корень многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами. Тогда по теореме 3 число $\overline{x}_0$ также является корнем этого многочлена и поэтому многочлен $P_n(x)$ делится (нацело) на многочлен

$$q(x) = (x - x_0)(x - \overline{x}_0) = (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 =$$
$$= x^2 + px + q, \text{ где } p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0.$$

Если $\overline{x}_0$ — корень этого многочлена кратности s, то многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $(x^2 + px + q)^s$. Зная все действительные и комплексные корни многочлена $P_n(x)$, его можно представить в виде произведения множителей вида $(x - a)^k$ и $(x^2 + px + q)^s$.

Задача 1. Разложить многочлен $P(x)$ на множители вида (2) с действительными коэффициентами, если

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Δ $P(x) = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1)$. ▲

Задача 2. Разложить многочлен $P(x)$ на множители, если

$$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

Δ Так как делителями числа -2 являются числа ± 1, ± 2, то целыми корнями уравнения $P(x) = 0$ могут быть только эти числа.

При $x = -1$ и $x = 2$ многочлен $P(x)$ обращается в нуль, и из теоремы 2 § 43 следует, что многочлен $P(x)$ делится на $(x + 1)(x - 2)$ и представляется в виде

$$P(x) = (x^2 - x - 2)Q(x).$$

Для нахождения $Q(x)$ можно либо разделить $P(x)$ на $x^2 - x - 2$, либо преобразовать многочлен $P(x)$, выделяя множители $x + 1$ и $x - 2$.

Так как $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = x^3(x + 1) - 2x^2(x + 1) + x(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$, $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1)$, то

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1). \blacktriangle$$

Упражнения

Разложить многочлен на множители (**491—492**).

491. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6.$

492. $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1.$

На множестве R разложить многочлен на множители (**493—495**).

493. $P(x) = x^4 + 5x^2 + 6.$

494. $P(x) = x^4 + 4.$

495. $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8.$

496. При каком условии многочлен $x^3 + px + q$ имеет два равных корня?

§ 45. Многочлены от двух и трех переменных

Многочлен от переменных x и y — алгебраическая сумма одночленов вида ax^ky^m, где a — заданное число (действительное или комплексное), k, m — неотрицательные целые числа.

Аналогично, многочлен от переменных x, y, z — алгебраическая сумма одночленов вида $ax^ky^mz^n$, где a — число, k, m, n — неотрицательные целые числа.

Примеры таких многочленов:

$$P(x, y) = 3x^2y + 4xy + 7y + 5,$$
$$Q(x, y, z) = 7x^3yz + 2xyz + 4.$$

Многочлен $P(x, y)$ называют *однородным* многочленом степени n, если

$$P(tx, ty) = t^nP(x, y).$$

Например, многочлен $P(x, y) = 3x^3 + 2x^2y + 4y^3$ является однородным многочленом третьей степени.

Многочлен $P(x, y)$ называют *симметрическим*, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Например, многочлен $P(x, y) = x^3 - 2xy + y^3$ является симметрическим многочленом.

Многочлены $x + y$ и xy являются простейшими симметрическими многочленами, а любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от u и v, где

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

При решении систем вида

$$\begin{cases} P(x,\ y) = 0, \\ Q(x,\ y) = 0, \end{cases}$$

где P и Q — симметрические многочлены, часть приходится выражать через u и v многочлена вида $S_n = x^n + y^n$, $n \in N$, $n \geqslant 2$. Суммы S_2, S_3, S_4, S_5 выражаются через $u = x + y$ и $v = xy$ формулами:

$$S_2 = x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \tag{1}$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = u^3 - 3uv, \tag{2}$$

$$S_4 = x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2, \tag{3}$$

$$S_5 = x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2. \tag{4}$$

Формулы (1), (2) можно доказать, используя равенства

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,\ x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy).$$

Задача 1. Доказать формулу

$$S_n = x^n + y^n = uS_{n-1} - vS_{n-2},\ n > 2. \tag{5}$$

Δ Воспользуемся равенством

$$uS_{n-1} = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2}),$$

откуда следует формула (5), с помощью которой можно выразить через u и v суммы S_4, S_5, S_6 и т. д. ▲

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Δ Это — симметрическая система. Полагая $x + y = u$, $xy = v$ и используя формулы (1), (3), запишем ее в виде

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 91, \\ u^2 = 7 + 3v. \end{cases}$$

Исключая из этой системы u^2, получаем

$$(7 + 3v)^2 - 4(7 + 3v)v + 3v^2 = 91$$

или $14v = 42$, откуда $v = 3$, $u^2 = 16$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Ответ. (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1).

З а д а ч а 3. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Δ В левых частях уравнений — однородные многочлены. Разложив их на множители, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7, \\ (x - y)xy = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Разделив уравнения системы (6) почленно, получим уравнение

$$\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = \frac{7}{2},$$

которое вместе с первым уравнением исходной системы образует систему, равносильную исходной.

Полагая $\frac{y}{x} = t$, получаем $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$, т. е. $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$. Если $y = 2x$, то из первого уравнения находим $x^3 = -1$, откуда $x_1 = -1$ (другие корни уравнения $x^3 = -1$ не являются действительными) и поэтому $y_1 = -2$.

Аналогично, если $y = \frac{x}{2}$, то $x^3 = 8$, откуда $x = 2$, $y = 1$.

О т в е т. $(-1; -2)$, $(2; 1)$. ▲

Обратимся к симметрическим многочленам $P(x, y, z)$ с тремя переменными. Это многочлены, которые не меняются, если поменять местами любую пару из переменных x, y, z.

Простейшими симметрическими многочленами являются многочлены

$$u = x + y + z,\ v = xy + xz + yz,\ w = xyz,$$

а примером простейшей симметрической системы является система вида

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = b, \\ xyz = c. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) и кубическое уравнение

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0 \tag{8}$$

связаны следующим образом.

Если t_1, t_2, t_3 — корни уравнения (8), то система (7) имеет шесть решений: $(t_1; t_2; t_3)$, $(t_1; t_3; t_2)$, $(t_2; t_1; t_3)$, $(t_2; t_3; t_1)$, $(t_3; t_2; t_1)$,

$(t_3;\ t_1;\ t_2)$, получаемых всевозможными перестановками трех чисел t_1, t_2, t_3. Обратно, если (x_0, y_0, z_0) — решение системы (7), то x_0, y_0, z_0 — корни уравнения (8).

Доказательство этого утверждения основано на использовании формул Виета для корней уравнения (8):

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = a, \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = b, \\ t_1t_2t_3 = c. \end{cases}$$

Для сведения к системам (7) систем симметрических уравнений вида

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ xyz = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ xyz = C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C \end{cases}$$

можно использовать следующие тождества:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz), \qquad (9)$$

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz, \quad (10)$$

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \quad (11)$$

Задача 4. Пусть $x + y + z = u$, $xy + yz + zx = v$, $xyz = w$. Выразить симметрический многочлен $x^3 + y^3 + z^3$ через элементарные симметрические многочлены u, v, w.

Δ Используя равенства

$$(x + y + z)^3 = ((x + y) + z)^3 = (x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 +$$
$$+ z^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3y^2z + 6xyz + 3xz^2 +$$
$$+ 3yz^2 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) +$$
$$+ 3yz(x + y + z) - 3xyz = x^3 + y^3 + z^3 +$$
$$+ 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz,$$

получаем

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz,$$

т. е. $x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3uv + 3w$. ▲

Задача 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, & (12) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, & (13) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. & (14) \end{cases}$$

Δ Используя уравнения (12), (13) и тождество (9), получаем

$$xy + xz + yz = -1. \qquad (15)$$

Применяя формулу (11) и учитывая равенства (13)—(15), находим $xyz = -2$.

Следовательно, исходная система равносильна системе вида (7), в которой $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$, а уравнение (8) имеет вид

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения — числа 1, −1, 2. Поэтому система имеет шесть решений, получаемых перестановкой чисел 1, −1, 2.

Ответ. (1; −1; 2), (1; 2; −1), (−1; 1; 2), (−1; 2; 1), (2; 1; −1), (2; −1; 1).

Задача 6. Разложить на множители многочлен $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ и доказать, что для всех неотрицательных u, v, w справедливо неравенство

$$\frac{u + v + w}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvw},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое трех неотрицательных чисел.

Δ В задаче 4 было получено равенство, которое можно записать в виде

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + xz + yz),$$

откуда следует, что

$$P = (x + y + z)((x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)),$$

где $(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$.

Следовательно,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2).$$

Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz.$$

Полагая $x^3 = u$, $y^3 = v$, $z^3 = w$, получаем

$$\frac{u + v + w}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvw}. \blacktriangle$$

Упражнения

497. Решить симметрическую систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2(x + y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{cases}$

498. Разложить на множители симметрический многочлен $P(x, y)$, если:
1) $P(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + x + y + 2xy$;
2) $P(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 + x + y^2 + y + 3xy$.

499. Разложить на множители симметрический многочлен:
1) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$;
2) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

500. Решить симметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + xz + yz = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Упражнения к главе VII

501. Выяснить делится ли многочлен $P(x)$ на $x - c$, если:
1) $P(x) = x^6 - 2x^3 - 6x^2 - 12x$, $c = 2$;
2) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5$, $c = -3$.

502. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - c$, если:
1) $P(x) = 7x^{20} + x^{13} + x^5$, $c = -1$;
2) $P(x) = 4x^{31} - x^{29} + 3$, $c = 1$.

503. Найти частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$, если:
1) $P(x) = 3x^3 + 4x^2$, $T(x) = 3x + 2$;
2) $P(x) = x^3 - 3x^2$, $T(x) = 2x^2 + 5$.

504. При делении многочлена $P(x)$ на $(x + 4)$ остаток равен 5, а при делении на $(x - 5)$ остаток равен 14. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x + 4)(x - 5)$.

505. При делении многочлена $P(x)$ на $(x + 3)$ остаток равен 10, а при делении на $(x + 5)$ остаток равен 14. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x^2 + 8x + 15$.

506. Доказать, что при любых $n \in N$, $m \in N$ многочлен $P(x) = x^{n+m} - x^n - x^m + 1$ делится на $(x - 1)^2$.

507. Доказать, что при любых $m \in N$, $n \in N$ многочлен $P(x) = x^{2m+n+1} + x^n - x^{2m+1} - 1$ делится на $x^2 - 1$.

508. Доказать, что при любом $n \in N$ многочлен $P(x) = x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n - x^2 + 2x - 1$ делится на $(x - 1)^3$.

509. Доказать, что при любых $n \in N$, $m \in N$ многочлен $P(x) = x^{m+n+1} - x^{m+n} - x^{m+1} - x^{n+1} + x^n + x^m + x - 1$ делится на $(x - 1)^3$.

510. Уравнение $ax^3 - 2x^2 - 5x + b = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

511. Найти a и b, если известно, что многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делится на $(x - 1)^2$.

512. Число $1 + \sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0.$$

Найти остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b — рациональные числа.

513. Число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0.$$

Найти остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b — рациональные числа.

514. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Доказать, что $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

515. Доказать, что при $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ многочлен $x^3 - ax^2 - bx - c$ не может иметь двух положительных корней.

516. Доказать, что если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

то имеют место следующие формулы:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c$$

(формулы Виета для кубического уравнения).

517. Доказать, что при любом действительном c уравнение $x^3 - x^2 + x + c = 0$ имеет только один действительный корень.

518. Доказать, что если $x = c$ — целый корень многочлена

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами, то для любого целого числа m число $f(m)$ делится на $c - m$.

519. Пусть многочлен $A(x)$ может быть представлен в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами и тем же свойством обладает многочлен $B(x)$. Доказать, что тогда и многочлен $A(x)B(x)$ обладает этим свойством.

520. Доказать, что если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех действительных x положительные значения, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Разделить многочлен $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ на многочлен $x^2 - x + 1$.
2. Найти остаток от деления многочлена $3x^3 - 2x^2 + 5x - 14$ на двучлен $x - 2$.
3. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x - 1$ и $x + 1$ равны соответственно 1 и -7. Найти остаток от деления этого многочлена на $x^2 - 1$.
4. Решить уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Разложить многочлен $x^4 + 2x^3 + 6x - 9$ на множители.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Еще со времен вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений и их систем. В Древнем Вавилоне 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третьей степени. Древние греки предварительно придавали уравнениям геометрическую форму: числа отождествлялись с длинами отрезков, нахождение неизвестной для них означало построение искомого отрезка. Но общей теории решения уравнений в те времена еще не было. Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге древнегреческого ученого Диофанта «Арифметика» (III век). Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней было получено итальянскими учеными в XVI веке.

В развитии алгебры уравнений велика роль французского математика и юриста Ф. Виета (1540—1603). Им был использован метод неопределенных коэффициентов, благодаря которому Виет первым записал уравнение в общем виде и выразил его решение формулой (до него удовлетворялись лишь решением примеров). Ему принадлежит применение единообразного приема решения уравнений степени $n \leqslant 4$, новый метод решения кубического уравнения. Особое значение имеет установление им зависимости между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета).

Между алгебраическими уравнениями и многочленами имеется тесная связь. Найти корни многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^n$ означает решить уравнение $P_n(x) = 0$.

Французский математик Э. Безу (1730—1783) сформулировал свою известную теорему о делении многочлена на линейный двучлен, позволяющую снизить степень алгебраического уравнения, зная один из его корней. Э. Безу занимался также исследованием систем алгебраических уравнений высших степеней и исключением неизвестных в таких системах.

Деление многочленов уголком можно обнаружить в работах И. Ньютона (1643—1727).

В «Универсальной арифметике» Л. Эйлера (1707—1783), по которой впоследствии составлялись учебники алгебры, приведено много задач, связанных с тождественными преобразованиями многочленов и алгебраических дробей. Таково, например, тождество:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ

1. Числа и алгебраические преобразования

521. Найти 2,5% от 3,2.

522. Найти число, если 42% его составляют 12,6.

523. Какой процент составляет 1,3 от 39?

524. Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65?

525. Найти число, 175% которого составляют 78,75.

526. Найти 180% от 7,5.

527. Цена товара была снижена сначала на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

528. В сплаве содержится 18 кг цинка, 6 кг олова и 36 кг меди. Каково процентное содержание составных частей сплава?

529. Стоимость товара и перевозки составляет 394 р. 20 к., причем расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без его перевозки?

530. Высота пирамиды 5 см, а площадь ее основания 4 см^2. На сколько процентов увеличится объем этой пирамиды, если и площадь ее основания, и высоту увеличить на 10%?

531. При делении некоторого числа на 72 получится остаток, равный 68. Каким будет остаток, если это же число разделить на 12?

532. Сумма двух чисел 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

533. По срочному вкладу, вносимому на срок не менее года, сберкасса выплачивает 3% годовых. Вкладчик внес в сберегательную кассу срочный вклад в размере 600 р. Какую сумму денег он получит в конце третьего года со дня вклада?

534. По обычному вкладу сберкасса выплачивает 2% годовых. Вкладчик внес 500 р., а через месяц снял со счета 100 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 100 р.?

Вычислить (535–536):

535. 1) $\dfrac{5,48+8,02}{(7,97+8,77):3,72}$; 2) $\dfrac{20,88:18+45:0,36}{19,59+11,95}$;

3) $23,276:2,3-3,6\cdot(17,2\cdot0,125+0,005:0,1)+6,25\cdot3,2$;

4) $9,25\cdot1,04-(6,372:0,6+1,125\cdot0,8):1,2+0,16\cdot6,25$.

536. 1) $\dfrac{\left(28:1\frac{3}{4}+7\frac{1}{3}:22+1\frac{2}{3}\cdot9\frac{3}{4}+14:1\frac{1}{2}\right)\cdot3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2}-9\frac{3}{4}}$;

2) $\dfrac{\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30:\frac{5}{28}}{\left(5\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{22}\right)\cdot48\frac{1}{2}}$;

3) $\left(0,645:0,3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\cdot1,96\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-0,108)$.

537. **Найти неизвестный член пропорций:**

1) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$; 3) $\dfrac{0,3}{x}=\dfrac{\frac{4}{9}}{3\frac{1}{3}}$;

2) $x:0,75=9\frac{1}{2}:14\frac{1}{4}$; 4) $\dfrac{x}{15}=\dfrac{1,456}{1,05}$.

Вычислить (538–540):

538. 1) $\left(625^{-\frac{1}{4}}\cdot75^{0,5}-8,7^{0}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3^{-0,5}}+1\right)$;

2) $\left(\dfrac{15\cdot5^{\frac{1}{2}}}{(125)^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot7^{\frac{1}{2}}\cdot49^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}$.

539. 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$; 4) $\left(5^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}\cdot2^{-3}$; 5) $\left(\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot9^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

3) $\left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt{(0,0016)^{-\frac{1}{4}}\cdot5^{-1}\cdot256^{0,75}}$.

540. 1) $\log_8 \sqrt{2}$; 2) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32}$; 3) $5^{2+\log_5 2}$;

4) $\left(\sqrt{3}\right)^{2-\log_{\sqrt{3}} 7}$; 5) $\log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36}$; 6) $16^{0{,}5\log_4 10+1}$.

541. Какое из чисел больше:

1) $\sqrt{8}$ или $2^{\left(2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9\right)}$; 3) $\sqrt{18}$ или $4^{\left(\log_2 3+\log_4\left(\frac{5}{11}\right)\right)}$;

2) $\sqrt{5}$ или $9^{\left(\log_3 \sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{8}{9}\right)\right)}$; 4) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\left(\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5\right)}$?

Упростить (542–543):

542. 1) $\frac{2\sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}$; 2) $\left(\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^3$;

3) $3\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{1}{2}\ \sqrt{20}+3\ \sqrt{180}-4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

5) $(m-n)\cdot\sqrt{\frac{k}{m^2-2mn+n^2}}$, $m>n>0$, $k>0$;

6) $\sqrt{b^2+2b\sqrt{2}+2}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{2}+2}$, $b>\sqrt{2}$.

543. 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}$; 2) $\sqrt{b^2(4b^4+4b^2+1)}$;

3) $\frac{a}{1-\sqrt{a}}+\frac{a}{1+\sqrt{a}}$ при $a>0$, $a\neq 1$;

4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$ при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

544. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{b}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 7) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 8) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

545. Освободиться от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 3) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$;

4) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}$; 6) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

546. Записать в виде обыкновенной дроби число:

1) 0,(4); 2) 2,(7); 3) 0,(21); 4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

547. Записать в виде десятичной периодической дроби число:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

548. Может ли быть рациональным числом:

1) сумма двух положительных иррациональных чисел;

2) произведение двух иррациональных чисел;

3) частное от деления суммы двух неравных иррациональных положительных чисел на их произведение?

549. Доказать, что если a и b — натуральные числа, $\sqrt{ab}$ — рациональное число, то $\sqrt{\frac{a}{b}}$ также рациональное число, а если $\sqrt{ab}$ — иррациональное число, то и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — иррациональное число.

550. Пусть a — рациональное, b — иррациональное числа, причем $a \neq 0$. Доказать, что $a+b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ — иррациональные числа.

551. Имеют ли общие точки промежутки:

1) $[1; 3\sqrt{2}+2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3}+4; 15]$;

2) $(0; \sqrt{27}+\sqrt{6})$ и $(\sqrt{48}-1; 10)$;

3) $[2; 2\sqrt{5}+2\sqrt{6}]$ и $(3\sqrt{2}+\sqrt{22}; 11)$;

4) $[1;\ 1+\sqrt{3}]$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1};\ 4\right)$?

552. Пусть $0 < a < b$. Доказать, что на числовой оси:

1) точка $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a; b]$;

2) точка $\frac{a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b; a]$;

3) точка $\frac{b-a}{2}$ — середина отрезка $[-a; b]$;

4) точка $\frac{-a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b; -a]$;

5) точка $\frac{a+bc}{1+c}$, где $c > 0$, лежит внутри отрезка $[a; b]$.

553. Вычислить диаметр круга x, вписанного в равносторонний треугольник (рис. 79), если $a = 6$ см.

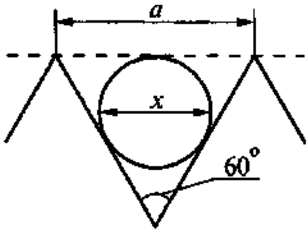

Рис. 79

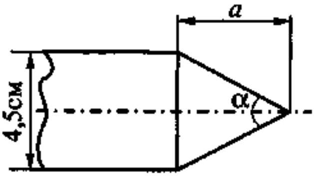

Рис. 80

554. Вычислить угол α заготовки, изображенной на рисунке 80, если $a = 4$ см.

555. Вычислить ширину l ущелья по данным, указанным на рисунке 81.

556. Вычислить длину моста по данным, представленным на рисунке 82.

557. Найти числовые значения всех остальных тригонометрических функций по данному значению одной из них $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos\alpha = 0{,}8$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

558. Вычислить:

1) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2)$; 5) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$.

559. Вычислить:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$;

3) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

4) $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

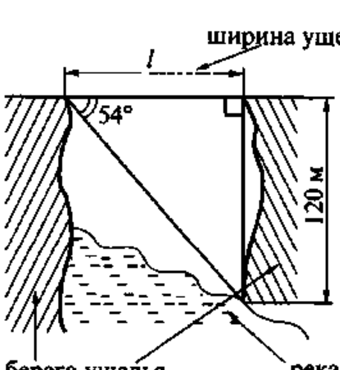

Рис. 81

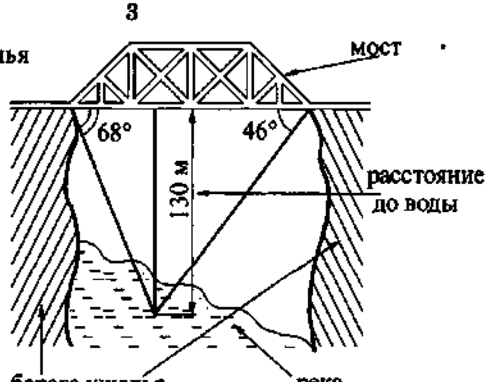

Рис. 82

560. На комплексной плоскости построить точку:

1) $2+4i$; 2) $1+3i$; 3) $-3+2i$; 4) $-1+2i$;
5) $-4-3i$; 6) $-2-i$; 7) $2-3i$, 8) $3-i$.

Выполнить действия (561–562).

561. 1) $(4+5i)(5+4i)+(3-2i)(2-3i)$;
2) $(9+15i)(3-5i)-(6+8i)(3-4i)$;
3) $(2+i^5)^2(2+i^3)^2$;
4) $(1+i^7)^3(1+i^9)^2$.

562. 1) $\frac{3-4i}{3+4i}+\frac{3+4i}{3-4i}$; 3) $\left(\frac{2+i^5}{1+i^3}\right)^2$;
2) $\frac{2+5i}{2-5i}+\frac{2-5i}{2+5i}$; 4) $\left(\frac{1+i^{11}}{2-i^7}\right)^2$.

563. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) 3; 2) $7i$; 3) $3+3i$; 4) $-2+2\sqrt{3}i$; 5) $2-2i$;
6) $-\sqrt{3}-i$; 7) $-6-6\sqrt{3}i$; 8) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

564. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $3-3i$; 2) $-1+i\sqrt{3}$; 3) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$;
5) $1+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$; 6) $1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$.

565. Вычислить:

1) $\frac{(1+i)^7\cdot(-1+i)^5}{(-1-i)^3}$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-6}$;
2) $\frac{(\sqrt{3}+i)^4\cdot(-1+i)^6}{(1+i)^4}$; 4) $(\sqrt{3}+i)^4\cdot(1-i)^6$.

566. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

1) $z=(1-i\sqrt{3})^2$; 2) $z=(1+i\sqrt{3})^2$.

Найти модуль комплексного числа (567–568).

567. 1) $z=\left(\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)+i\sqrt{\sin\frac{2\pi}{3}}$; 2) $z=\left(\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\right)+i\sqrt{\sin\frac{2\pi}{5}}$.

568. 1) $z=\sin\alpha-i(1+\cos\alpha)$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
2) $z=(\sin\alpha-\cos\alpha)-i\sqrt{\sin 2\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

569. Упростить:

1) $-\left(\frac{2}{1+i}\right)^{10}$; 2) $\frac{2^{13}}{(i-1)^{15}}\cdot(0{,}5i)^4$.

570. Доказать, что число $\frac{z-i}{z+i}$ является действительным числом тогда и только тогда, когда z — чисто мнимое число, $z \neq -i$.

571. Доказать, что число $\frac{z-i}{z+i}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$, $z \neq -i$.

572. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$. Каков геометрический смысл этого равенства?

Упростить (573–580).

573. 1) $\frac{a^2+3a+2}{a^2-25} \cdot \frac{10-2a}{a+2}$; 3) $\frac{a+2}{a-2} \cdot \left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6} : \frac{2a-3}{a-2}\right)$;

2) $\frac{b^2-1}{b^2+2b-3} \cdot \frac{2b+1}{b+1} + \frac{b+2}{b+3}$; 4) $\left[\left(2+\frac{1}{b}\right) : \left(\frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\right)\right] \cdot \frac{2b+1}{b}$.

574. 1) $\left(\frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{3a^2+2a+4}{a^3-1}\right) : \frac{3}{1-a}$;

2) $\left(\frac{5}{3a-3b} + \frac{a-3b}{a^2-b^2} + \frac{1}{2a+2b} + \frac{17a-25b}{6a^2-6b^2}\right) \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{6}$.

575. 1) $\left(\frac{c+d}{c-d} - \frac{c-d}{c+d} + \frac{4d^2}{d^2-c^2}\right) \cdot \frac{c+d}{2d}$;

2) $\left(a - \frac{b+a}{1+ab}\right) : \left(1 - \frac{b+a}{1+ab}\right) \cdot \frac{1}{b}$;

3) $\left(a + \frac{b-a}{1+ab}\right) : \left(1 - \frac{a(b-a)}{1+ab}\right)$;

4) $\left(\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b-a}{a-b} + \frac{a^2}{b^2-a^2}\right) : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

576. 1) $\left(\frac{1+2m}{1+m} + \frac{1}{m}\right) : \left(\frac{1+2m}{m} - \frac{1}{1+m}\right)$;

2) $\left(\frac{a^2}{2b^2} - 4 + \frac{8b^2}{a^2}\right) : \left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a}\right)$;

3) $\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1}$;

4) $\frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{(a+1)^2+a+1} - \frac{2}{a+3}$.

577. 1) $\dfrac{1}{4+4\sqrt{a}}-\dfrac{1}{2-2a}+\dfrac{1}{4-4\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

578. 1) $\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\dfrac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{b}}$; 4) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

579. 1) $\dfrac{(ab^{-2}+a^{-2}b)^{-1}\cdot(a^{-3}+b^{-3})}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}}\right)^{-10}}$; 2) $\left(\dfrac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$.

580. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}}$;

2) $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^2+18b+81)^{0,5}$.

Разложить на множители (581–582).

581. 1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha$; 3) $3-4\sin^2\alpha$;

2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha$; 4) $1-4\cos^2\alpha$.

582. 1) $\sin\alpha+2\sin2\alpha+\sin3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

2) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $1+\cos\alpha+\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

583. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$;

3) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Упростить выражение (584–585).

584. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha$;   2) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;   3) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$;   5) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;   6) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

585. 1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$;   4) $\frac{\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$;   5) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$;   6) $\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

Доказать тождество (586–590).

586. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

5) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

6) $\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=\sin 3\alpha$.

587. 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$;   2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

588. 1) $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$;   3) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;   4) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

589. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;   2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

590. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. Уравнения

591. Решить уравнение:

1) $\dfrac{2x+4}{5}=2-\dfrac{6-7x}{15}$; 2) $1{,}5-\dfrac{x}{3}=\dfrac{2x-5}{6}-\dfrac{x-4}{3}$;

3) $\dfrac{3x-16}{12}+1=\dfrac{x+6}{4}-\dfrac{x+3}{6}$; 4) $\dfrac{5}{3}(x-7)-3x-\dfrac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\dfrac{43}{3}\right)$.

592. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

593. При каком значении b уравнение $1-b\,(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1?

Решить уравнение (594–602).

594. 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9= x(x+4)-(x+5\,(x+2)$;
2) $2\,(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$.

595. 1) $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{x-1}{x-2}=4$; 4) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-16x+7}-1=\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{2}{2x-7}$;

2) $\dfrac{3x}{x+5}-1=\dfrac{2x+5}{x}$; 5) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{4}{x^2-9}$;

3) $\dfrac{5}{3x+7}=\dfrac{7}{5x+9}$; 6) $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{11}{x^2-6x+8}$.

596. 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)\,x$; 2) $a^2x=a+b+b^2x$.

597. 1) $x^2-2x-15=0$; 4) $12x^2-4x=0$;

2) $3x^2+4x-4=0$; 5) $2x^2-x=1$;

3) $7x^2+4x=0$; 6) $4x^2-100=0$.

598. 1) $\dfrac{x^2}{12}=\dfrac{7x}{12}-1$; 3) $(x-3)(x-2)=6\,(x-3)$;

2) $2x-\dfrac{10}{3}=\dfrac{x^2}{6}$; 4) $x^2-\dfrac{11x}{6}+\dfrac{1}{2}=0$.

599. 1) $x-1=\dfrac{1}{x-1}$; 3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=0$;

2) $\dfrac{x^2+12}{x-3}=\dfrac{7x}{x-3}$; 4) $\dfrac{3x^2}{3x+1}-2=\dfrac{2x+1}{3x+1}$.

600. 1) $\dfrac{3x-1}{x+2}-\dfrac{7}{2+x}=\dfrac{7x^2-28}{x^2-4}+\dfrac{18}{2-x}$; 2) $\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{12}{x^2-9}=\dfrac{2-x}{3-x}$.

601. 1) $\frac{2x}{x-3}+\frac{1}{2x+3}+\frac{3x+9}{2x^2-3x-9}=0$; 2) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$.

602. 1) $x-4+\frac{1}{x}=0$; 2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

Найти действительные корни уравнения (603–604).

603. 1) $x^4-7x^2+12=0$;
2) $x^4-11x^2+30=0$;
3) $x^4-13x^2+36=0$;
4) $2x^4-5x^2+2=0$;
5) $x-2\sqrt{x}=15$;
6) $4\sqrt{x}+x-5=0$.

604. 1) $x^3-3x^2+x=3$;
2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;
3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$;
4) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$.

605. Пересекает ли график функции $y=x^3-6x^2+11x-6$ ось Ox в точках, абсциссы которых являются целыми числами?

Найти действительные корни уравнения (606–607).

606. 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$;
2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$;
3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$;
4) $\frac{3x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x}{x-1}-2=0$.

607. 1) $x^2-3ax-b^2+\frac{9a^2}{4}=0$;
2) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$;
3) $\frac{x}{x-b}+\frac{2x}{x+b}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$;
4) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

608. Не решая квадратного уравнения $4x^2-3x-10=0$, вычислить:

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; 4) $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$.

609. В квадратном уравнении $(2k+3)x^2-kx+5=0$ найти значение k, при котором:
1) корень уравнения равен 5;
2) сумма корней уравнения равна 2;
3) произведение корней уравнения равно $\frac{1}{3}$.

610. Сумма корней квадратного уравнения $ax^2-(a^2+2)x+7=0$ равна 3. Найти значение a.

611. При каком значении b произведение корней квадратного уравнения $b^2x^2+8x+b+4=0$ равно 3?

612. При каком условии трехчлен $ax^2 + bx + c$ является квадратом двучлена?

613. Доказать, что корни уравнения $ax^2 + bx + a = 0$ являются взаимно обратными числами, если $a \neq 0$.

Решить уравнение (614–615).

614. 1) $|2x - 3| = 7$;
2) $|x + 6| = 2x$;
3) $\left|\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right| = x - 1$;
4) $2x - 7 = |x - 4|$.

615. 1) $|6 - 2x| = 3x + 1$;
2) $2|x - 2| = |x| - 1$;
3) $|3x - 1| + |4 - x| = 5$;
4) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = x - 1$.

616. Найти наименьший корень уравнения $|x^2 - 3x - 6| = 2x$.

617. Найти наибольший рациональный корень уравнения

$$|x^2 - 8x + 5| = 2x.$$

Решить уравнение (618–627).

618. 1) $\sqrt{2x+7} = x + 2$;
2) $x = 2 - \sqrt{2x-5}$;
3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;
4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$;
5) $\sqrt{2x^2 - x + 10} - x = 2$.

619. 1) $\sqrt{\sqrt{x^2 + 6x}} = 2$;
2) $\sqrt{\sqrt{x^2 - 3x}} = \sqrt{2x}$;
3) $\sqrt{3x+2} = 3\sqrt{x} - \sqrt{2}$;
4) $\frac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{5}{11}$.

620. 1) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x = 7$;
2) $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$;
3) $\sqrt{4x - 5 + \sqrt{2x - 9}} = 4$;
4) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$;
5) $\frac{6 - x}{\sqrt{x+9}} = \sqrt{8 - 3x}$;
6) $\frac{2 - x}{2 - \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2 - x}{2}}$.

621. 1) $3^{x-7} = 81$;
2) $2^{x^2 - 5x + 6,5} = \sqrt{2}$;
3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-7} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-7}$;
4) $2^{x+4} - 2^x = 120$.

622. 1) $9^{5x} - 9^{5x-1} = 8$;
2) $\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$;
3) $(0,2)^{x^2} \cdot 5^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$;
4) $4^x - 4^{x-1} + 4^{x-2} = 52$.

623. 1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$; 2) $4^{x-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}+\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3-x}{2}}=208.$

624. 1) $2\lg x-\lg 5=5+3\lg 2$; 3) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$;

2) $1-\lg 2=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{3}+\lg x+\frac{1}{2}\lg 3\right)$; 4) $2\lg x=-\lg\frac{1}{6-x^2}$.

625. 1) $\log_2(2x-18)+\log_2(x-9)=5$;

2) $\lg(x^2+19)-\lg(x+1)=1$.

626. 1) $5^{\log_3 x^2}-6\cdot 5^{\log_3 x}+5=0$;

2) $25^{\log_3 x}-4\cdot 5^{\log_3 x+1}=125$;

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

4) $\lg 10+\frac{1}{3}\lg(271+3^{\sqrt{2x}})=2$.

627. 1) $\lg(3^{x-2}-2)=0$; 4) $x^{\log_3 x}=9x$;

2) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$; 5) $x^{\lg x}-1=10\left(1-x^{-\lg x}\right)$;

3) $x^{\lg x}=10$; 6) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

628. Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n)=k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k — действительные числа?

629. Решить уравнение (z — комплексное число):

1) $z^2+2z+5=0$; 5) $z^2+4z+19=0$;

2) $z^2-6z+10=0$; 6) $z^2-2z+3=0$;

3) $9z^2-6z+10=0$; 7) $2z^2-z+2=0$;

4) $4z^2+16z+17=0$; 8) $3z^2+2z+1=0$.

630. На множестве комплексных чисел решить уравнение:

1) $z^4+5z^2-36=0$; 3) $z^4-z^2-6=0$;

2) $z^4-8z^2-9=0$; 4) $z^4+2z^2-15=0$.

Решить уравнение (631–642).

631. 1) $\sin 2x=3\cos x$;

2) $\sin 4x=\cos^4 x-\sin^4 x$;

3) $2\cos^2 x=1+4\sin 4x$;

4) $2\cos 2x+2\cos x\sin^2 x=\cos x$;

5) $\sin 2x+2\sin x-3\cos x=3$;

6) $2\cos x+\cos 2x=2\sin x$.

632. 1) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$;

2) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$;

3) $8\sin x\cos 2x\cos x=\sqrt{3}$;

4) $4\sin x\cos x\cos 2x=\cos 4x$;

5) $2\sin^2 x+3\sin^2 2x=0$;

6) $\cos^4\frac{3x}{2}-\sin^4\frac{3x}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

633. 1) $\sin^4 x + \cos^4 x = 0,5$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$;

3) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \cos 2x$;

4) $\cos^2 x + 7 \sin^2 x = 8 \cos x \sin x$;

5) $9 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 7$;

6) $2 + \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = \sin^2 x$.

634. 1) $\sin 5x = \sin 3x$;
2) $\cos 6x + \cos 2x = 0$;
3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$;
4) $\sin x = \cos 5x$.

635. 1) $\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$;

3) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$;

4) $\cos 7x - \cos 3x = 3 \sin 5x$.

636. 1) $3 \sin x + \cos x = 1$;
2) $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=3$;
3) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$;
4) $4 \cos x + \sin x = 4$;
5) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$;
6) $\sin x+3\cos x=\sqrt{10}$.

637. 1) $\sin x + \cos x + \cos 2x = 0$;

2) $\sin x - \cos x = \cos^4 x - \sin^4 x$;

3) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\frac{1}{2}\sin 2x$;

4) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

638. 1) $5 + \sin 2x = 5 (\sin x + \cos x)$;

2) $\sin 2x = (\sqrt{2} - 1) (1 + \sin x + \cos x)$;

3) $5 + \sin x + 2 \sin x \cos x = \cos x$;

4) $2 + 2 \cos x = 3 \sin x \cos x + 2 \sin x$.

639. 1) $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$;

2) $\sin 6x \cos 4x = \sin 7x \cos 3x$;

3) $\sin 3x \sin 2x = \cos 4x \cos 3x$;

4) $2 \sin x \sin 3x = \cos 2x$.

640. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

641. 1) $\operatorname{tg}^2 3x - 4 \sin^2 3x = 0$;
2) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$;
3) $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$;
4) $4 \operatorname{ctg}^2 x=5-\frac{9}{\sin x}$;
5) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$;
6) $\sin x \operatorname{ctg} 3x = \cos 5x$.

642. 1) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$;
2) $\operatorname{ctg} 2x = 2 \operatorname{ctg} x$;
3) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$;
4) $\operatorname{tg}(2x + 1) \operatorname{ctg}(x + 1) = 1$.

3. Неравенства

Решить неравенство (643–644):

643. 1) $x+8>4-3x$; 3) $\frac{x+4}{4}<x-1$;

2) $3x+1-2(3+x)<4x+1$; 4) $\frac{2x-5}{-3}<x$.

644. 1) $1{,}5x+3<4x+0{,}6$; 4) $\frac{7-x}{9}-\frac{2+3x}{3}>0$;

2) $\frac{3x-8}{4}-9>x-\frac{2x-37}{3}$; 5) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}<2$;

3) $10x-\frac{6x-7}{2}<\frac{20x+1}{3}$; 6) $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}\geqslant 2$.

645. При каких значениях x следующая дробь положительна:

1) $\frac{2x-1}{7}$; 2) $\frac{2x-1}{3x-2}$; 3) $\frac{21x-5}{6-3x}$; 4) $\frac{3-11x}{4}$;

5) $\frac{5x-4}{7x+5}$; 6) $\frac{3x+10}{40-x}$; 7) $\frac{x+2}{5-4x}$; 8) $\frac{8-x}{6+3x}$?

646. При каких значениях x следующая дробь отрицательна:

1) $\frac{11x-28}{7}$; 2) $\frac{3-2x}{3x-2}$; 3) $\frac{4x+9}{2x-5}$;

4) $\frac{10-4x}{9x+2}$; 5) $\frac{6-5x}{x^2}$; 6) $\frac{18-7x}{-4x^2-1}$?

647. Решить неравенство:

1) $\frac{3x+2}{x-1}<2$; 2) $\frac{5x+4}{x-3}<4$; 3) $\frac{3}{2x+3}\geqslant\frac{2}{3}$;

4) $\frac{2}{x-4}<1$; 5) $\frac{2}{x-1}<\frac{3}{x-4}$; 6) $\frac{2}{x+3}\leqslant 4$.

648. Решить квадратное неравенство:

1) $x^2-3x-4>0$; 6) $3x^2-2x+7>0$;

2) $x^2-6x\geqslant 8x-45$; 7) $3x^2+4x-4\geqslant 0$;

3) $x^2-8x+7\leqslant 0$; 8) $-\frac{1}{2}x^2+x-5>0$;

4) $4x+21-x^2>0$; 9) $8x^2-2x-1<0$;

5) $26-11x-x^2<0$; 10) $5x^2+7x\leqslant 0$.

Решить неравенство (649–650).

649. 1) $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0$; 2) $(2x^2+3)(x+4)^3>0$.

650. 1) $\frac{3x-6}{2x^2+5x-3}<0$; 2) $\frac{3x-15}{x^2+5x-14}\geqslant 0$; 3) $\frac{5x^2+4x-1}{6-2x}\leqslant 0$;

4) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; 5) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$; 6) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3}>0$.

651. При каких значениях x выражение $\lg(x^2+8x+15)$ не имеет смысла?

652. При каком наименьшем целом значении m уравнение $(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3=0$ имеет два различных действительных корня?

653. При каких целых значениях m уравнение $(m-7)x^2+2(m-7)x+3=0$ не имеет действительных корней?

654. При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$ принимает отрицательное значение?

655. При каком наименьшем целом значении x выражение $\frac{x^2-x-6}{-7-x^2}$ принимает положительное значение?

Решить неравенство (**656–669**).

656. 1) $|x-3|<6$; 2) $|x-3{,}4|>0{,}6$; 3) $|x-7|>2$;

4) $|2x-3|<0{,}5$; 5) $|2x-3|<x$; 6) $|4-x|>x$.

657. 1) $|x^2-7x+12|\leqslant 6$; 3) $|2x^2-x-1|\geqslant 5$;

2) $|x^2-3x-4|>6$; 4) $|3x^2-x-4|<2$.

658. 1) $\sqrt{x}<x$; 3) $\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}x-1$;

$\sqrt{}$ $\sqrt{x+3}<\sqrt{6-2x}$.

659. 1) $\sqrt{2}x<4-x$; 3) $\sqrt{3x^2-7x-6}>-2$;

2) $\sqrt{x^2-2}<3$; 4) $\sqrt{x^2+2}<x+2$.

$\sqrt{x^2+2}>x+2$; 2) $\sqrt{x+2}<|2x-2|$.

661. 1) $2^{-x+5}<\frac{1}{4}$; 3) $4^{x^2+x-12}>1$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}>\frac{1}{27}$; 4) $3^{\frac{\frac{2}{3}x-1}{2x+3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

662. 1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt[3]{3}$; 2) $3^{x+1}+3^{x-1}<10$.

663. 1) $2^{2x}-4^{x-1}+8^{\frac{2}{3}x}\cdot 2^{-4}>52$;

2) $2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x-2}>5^{x+1}+2^{x+4}$.

664. 1) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_2(x^2-4x+3,5)} < \frac{1}{5}$.

665. 1) $\log_6 (2-x) < \log_6 (2x+5)$; 3) $\frac{\log_3 (x-1)}{\log_2 x} < 0$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2) \geqslant -1$; 4) $\frac{\log_3 (x-1)}{\log_4 x} > 0$.

666. 1) $4^{\log_{0,25}(3-2x)} < 2$; 3) $\sqrt{\lg x} < \frac{1}{2}$;

2) $\frac{\log_3 (x-1)}{2x-1} < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} (2x+6)+2$.

667. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1}\right) \leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_4 \ (x^2-5)\right) > 0$;

3) $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x$.

668. 1) $\cos(-3x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

669. 1) $2\cos^2 x - 1 > 0$; 2) $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 > 0$.

670. С помощью графика решить неравенства:

1) $\sin x < \frac{1}{4}$; 3) $\sin x > -\frac{1}{4}$;

2) $\mathrm{tg}^2\, x - 3 \leqslant 0$; 4) $\cos x > \frac{1}{3}$.

Доказать неравенство **(671–673)**.

671. 1) $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, если $a > 0$ и $b > 0$;

2) $\frac{a^3+b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

672. 1) $(a+b)(ab+1) \geqslant 4ab$, если $a > 0$ и $b > 0$;

2) $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 > 4ab(a^2+b^2)$, если $a \neq b$.

673. 1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

2) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b+c)$;

3) $a^2 + ab + b^2 + 2a - 2b + 4 \geqslant 0$;

4) $3(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$, если $a > 0$.

4. Системы уравнений и неравенств

Решить систему уравнений (674–675):

674. 1) $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 6x+2y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-3y-1=0, \\ x+3y-5=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-7y=3, \\ 6x+5y=17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y-13=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

675. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1, \\ y=\dfrac{1}{2}x-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{9x-y}{7}-2y=3, \\ \dfrac{12x+5y}{3}-3x=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{5}-\dfrac{x+y}{2}=10, \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=0. \end{cases}$

Найти действительные решения системы (676–680).

676. 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+2y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \dfrac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=20, \\ xy=96; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=12, \\ x+y=7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=-30, \\ x-y=11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

677. 1) $\begin{cases} x^2+x+y=6, \\ y-x=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x^2+x+y=10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

678. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2=13x+4y, \\ y^2=4x+13y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3\dfrac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40, \\ 2x^2+y^2+3x=52. \end{cases}$

679. 1) $\begin{cases} 2x+y=3x^2, \\ x+2y=3y^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+xy^2=-2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+3y^2=7, \\ xy+y^2=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2-x^2=4x+4, \\ x^2+y^2+3xy=4. \end{cases}$

680. 1) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\\ x^2+y^2=16;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y+xy=5,\\ x^2+y^2+xy=7;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{y}{x}-\frac{1}{y}=3xy,\\ y^2+x=5x^2y^2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.\end{cases}$

Решить систему уравнений (681–684).

681. 1) $\begin{cases}2^x\cdot 4^y=\frac{1}{2},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=0{,}5,\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=16;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2^x-3^y=7,\\ \sqrt{2^x}-3^y=-5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt[x+y]{3x+y+6}=2,\\ 2^{3x+y}=1024.\end{cases}$

682. 1) $\begin{cases}3\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}-2\cdot 3^{y+1}=-5{,}25,\\ 16^x+3^y=1{,}25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x+3^y=36,\\ 3^{2x-y}+3^x=12.\end{cases}$

683. 1) $\begin{cases}\lg x+\lg y=5,\\ \lg x-\lg y=3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^{\lg y}=1000,\\ \log_y x=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}3\lg x+8\lg y=-2,\\ 9\lg x-6\lg y=24;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^{\lg y}=100,\\ \lg x+\lg y=3.\end{cases}$

684. 1) $\begin{cases}\log_2^2(x+y)=1+\log_2^2 x-\log_2^2 y,\\ \log_2(x+y)=\log_2 x\cdot\log_2 y;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_2^2 x+\log_2 y=\log_2(x+y)+1,\\ \log_{\frac{2}{3}} x\cdot\log_{\frac{2}{3}} y=\log_{\frac{2}{3}}(x+y).\end{cases}$

685. **Решить систему уравнений (x, y — неизвестные комплексн числа):**

1) $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=6,\\ x+y=2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x^2-2y^2=7,\\ 3x-2y=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2=6,\\ x+y=4;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2-y^2=5,\\ xy=6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-y^2=6,\\ 2x-y=3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2-y^2=8,\\ xy=3.\end{cases}$

686. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5(1-2x)>12-\dfrac{4x+3}{2}, \\ 1+x<\dfrac{8-x}{3}-\dfrac{2-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5}-\dfrac{x+2}{4}<\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{x-4}{2}, \\ \dfrac{x-2}{3}>1+\dfrac{x-5}{15}. \end{cases}$

687. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} \log_2(x-1)+\log_2(3-x)<1, \\ x^2-7x+10<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+5}<\dfrac{2x+5}{2}, \\ \log_3(x-1)+\log_3(x+7)<2. \end{cases}$

688. Найти наименьшее и наибольшее целые решения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{3x+5}{3}-\dfrac{x}{6}<3-\dfrac{x+4}{2}, \\ 1-\dfrac{2x-8}{3}+\dfrac{4-3x}{2}<2x-\dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$$

Решить систему уравнений (689–690).

689. 1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

690. 1) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x\sin y=\dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x+\sin 2y=0. \end{cases}$

5. Текстовые задачи

691. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за 3 мин, а по движущемуся — за 45 с. За какое время эскалатор поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира?

692. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, а против течения за 9 ч. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

693. Пароход должен был пройти некоторое расстояние за 2,25 сут., но оказалось, что он проходил за каждый час на 2,5 км больше, чем предполагалось, а потому прошел намеченный путь за 2 сут. Какое расстояние должен был пройти пароход?

694. Один рабочий выполняет некоторую работу за 24 дня, другой ту же работу может выполнить за 48 дней. За сколько дней будет выполнена эта работа, если оба рабочих будут работать вместе?

695. Бассейн наполняется двумя трубами за 7,5 ч. Одна труба наполняет бассейн на 8 ч быстрее, чем другая. За сколько часов первая труба, работая отдельно, может наполнить бассейн?

696. В хозяйстве было собрано 4556 ц яровой пшеницы с общей площади 174 га, причем на целинных землях собрано по 30 ц с одного гектара, а на остальной площади — по 22 ц. Сколько гектаров целинных земель было освоено?

697. Разность двух чисел относится к их произведению как 1:24, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

698. Три дроби имеют числители, равные единице. Сумма этих дробей равна 1. Разность между первой и второй дробью равна третьей дроби. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найти эти дроби.

699. Бригада рабочих должна была к определенному сроку изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада за день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

700. Катер направился от речного причала вниз по реке и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до начала движения катера. Если бы катер отправился одновременно с плотом, то, пройдя 30 км и повернув обратно, встретил бы плот на расстоянии 10 км от речного причала. Найти собственную скорость катера.

701. Две организации приобрели театральные билеты. Первая организация израсходовала на билеты 300 р., а вторая, купившая на 5 билетов меньше и заплатившая за каждый билет на 3 р. меньше первой организации, заплатила за билеты 180 р. Сколько театральных билетов купила каждая организация?

702. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала его, пройдя 17 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки по течению больше скорости плота на 48 км/ч?

703. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с гектара больше, чем на втором?

704. Расстояние от дома до школы 700 м. Сколько шагов делает ученик, проходя путь от дома до школы, если его старший брат, шаг которого на 20 см длиннее, делает на 400 шагов меньше?

705. Друзья решили подарить одному из своих товарищей на день рождения магнитофон за 2400 р. Во время покупки двое отсутствовали и потому остальные, внося деньги поровну, должны были увеличить свой первоначальный взнос на 40 р. Сколько друзей участвовало в покупке?

706. При состязании конькобежцев в беге на 10 000 м победитель пришел к финишу за 18 мин, опередив другого на целый круг. Найти длину одного круга, если победитель проходил один круг на 1,8 с быстрее, чем отставший от него на целый круг конькобежец.

707. Два тела движутся навстречу друг другу из двух пунктов, находящихся на расстоянии 153 м. Первое проходит по 10 м/с, а второе в первую секунду прошло 3 м и в каждую следующую секунду проходит на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

708. Поезд проходит перегон в 120 км по графику с одной и той же скоростью. В один из дней поезд остановили на 5 мин на середине перегона и, для того чтобы прийти вовремя, машинист увеличил скорость на 10 км/ч. На следующий день поезд опять был задержан на середине перегона на 9 мин. На сколько должен был увеличить машинист скорость, чтобы и на этот раз прибыть вовремя?

709. Найти четыре числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если третье число больше первого на 9, а второе больше четвертого на 18.

710. Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трех ее членов равна нулю, а сумма четырех первых равна 1.

711. Найти четыре числа, зная, что первые три из них являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — арифметической прогрессии. Сумма первого и четвертого чисел равна 16, а второго и третьего — 12.

712. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый ее члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

713. Произведение пятого и шестого членов арифметической прогрессии в 33 раза больше произведения ее первого и второго членов. Во сколько раз пятый член прогрессии больше второго, если известно, что все члены прогрессии положительны?

714. В треугольнике, площадь которого 12 см^2, середины сторон соединены отрезками. Во вновь полученном треугольнике точно так же образован новый треугольник и т.д. Найти сумму площадей всех получающихся таким построением треугольников.

6. Функции и графики

715. График линейной функции $y=-\frac{5}{2}x+b$ проходит через точку $(-2; 3)$. Найти b.

716. График линейной функции $y = kx + 3$ проходит через точку $(-1; 4)$. Найти k.

717. Найти коэффициенты k и b линейной функции $y = kx + b$, если ее график проходит через точки A и B:

1) $A(-1; -2)$, $B(3; 2)$;
2) $A(2; 1)$, $B(1; 2)$;
3) $A(4; 2)$, $B(-4; -3)$;
4) $A(-2; -2)$, $B(3; -2)$.

718. Через точку $A(-3; 2)$ проходит прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $B(-2; -2)$ и $C(3; 0)$. Записать формулы, задающие линейные функции, графиками которых являются данные прямые.

719. Выяснить, принадлежит ли прямой $x+\frac{y}{2}=1$ точка A:

1) $A(-1; 4)$;
2) $A(0; 3)$;
3) $A(1; 0)$;
4) $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

720. Линейная функция задана формулой $y=-\frac{3}{4}x+2$. Найти:

1) точки A и B пересечения ее графика с осями координат;
2) длину отрезка AB;
3) расстояние от начала координат до прямой $y=-\frac{3}{4}x+2$.

721. Найти значения x, при которых график функции $y = 3x - 1$ расположен: 1) выше оси Ox; 2) ниже оси Ox.

722. Найти значения x, при которых значения функции $y = -2x + 1$: 1) положительны; 2) отрицательны.

723. Найти значения x, при которых график функции $y = 2x - 1$ лежит ниже графика функции $y = 3x - 2$.

724. Найти значения x, при которых график функции $y=(\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}$ лежит выше графика функции $y=(1+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$.

725. Доказать, что функция $y = 2x - 3$ возрастает.

726. Доказать, что функция $y=-\sqrt{3}x-3$ убывает.

727. Выяснить, пересекаются ли графики следующих функций:

1) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$;
2) $y = 3x - 2$ и $y = 5x + 1$;
3) $y = 3x - 2$ и $y = 6x - 4$.

728. Построить график функции:

1) $y = 2 - |x|$; 2) $y = |2 - x|$; 3) $y = |2 - x| + |x - 3|$.

Выяснить, пересекают ли графики каждой из данных функций прямую $y = 3$. В случае утвердительного ответа найти координаты точек пересечения.

729. Дана функция $y = x^2 - 2x - 3$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что эта функция возрастает на промежутке $[1; 4]$.

3) Найти значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.

4) Найти значения x, при которых график функции $y = x^2 - 2x - 3$ лежит выше графика функции $y = -2x + 1$.

5) Записать уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 3$ в точке с абсциссой, равной 2.

730. Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция $y = -2x^2 + 3x + 2$ убывает на промежутке $[1; 2]$.

3) Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.

4) Найти значения x, при которых график функции $y = -2x^2 + 3x + 2$ лежит ниже графика функции $y = 3x + 2$.

5) Записать уравнения касательных к параболе $y = -2x^2 + 3x + 2$ в точках с ординатой, равной 3.

731. Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = x + 6$;

2) $y = \dfrac{3}{x}$ и $y = 4(x + 1)$;

3) $y = \dfrac{1}{8}x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$;

4) $y = 2x - 1$ и $y = \dfrac{1}{x}$.

732. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y = ax^2 + bx - 4$, если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$.

733. Найти точки пересечения с координатными осями графика квадратичной функции:

1) $y = 2x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 2x^2 - 5x + 2$; 3) $y = 4x^2 + 12x + 9$.

734. Построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 15$, $y(3) = 0$, $y(0) = -3$.

735. Построить график функции $y = \sqrt{25 - x^2}$. Указать по графику промежутки монотонности функции. Доказать, что график данной функции симметричен относительно оси Oy.

736. Построить график функции $y = \dfrac{5}{x-2}$. Доказать, что функция $y = \dfrac{5}{x-2}$ убывает на промежутках $x < 2$ и $x > 2$. В какой точке график функции $y = \dfrac{5}{x-2}$ пересекает ось ординат?

737. Найти функцию, обратную данной. Построить на одном рисунке графики данной и обратной ей функции:

1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = x^4$, $x \geqslant 0$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$;

4) $y = |x - 2|$, если $x \leqslant 2$; 5) $y = x^2 - 8x + 16$, если $x \geqslant 4$.

738. Построить на одном рисунке графики данной функции и обратной ей функции:

1) $y = 2^{x-2}$; 3) $y = 3^x - 1$;

2) $y = \log_3 (x - 2)$; 4) $y = 2 + \log_2 x$.

Найти область определения функции (739–742).

739. 1) $y = \lg (2 - x) - \arcsin \dfrac{x}{2}$; 2) $y = \lg (x^2 + 2x - 15)$.

740. 1) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{x-6}}$.

741. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\log_2 (x-1)}$; 2) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{3-x}$.

742. 1) $y = \lg (1 - \lg (x^2 - 5x + 6))$; 2) $y = \arccos \sqrt{\dfrac{2}{3-x}}$.

743. Найти значения x, при которых значения функции $y = 5^x - 2$ меньше 3.

744. При каких значениях аргумента значения функции $y = \log_5 (x - 2)$ больше 2?

745. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью Ox.

746. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x^3} + 1$ в точке с абсциссой $x = 4$.

747. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 (2x - 3) - 12 (3x - 2)$ на промежутке $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

748. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2 \ln^3 x - 9 \ln^2 x + 12 \ln x$ на промежутке $e^{\frac{3}{4}} \leqslant x \leqslant e^3$.

749. На параболе $y = x^2$ найти точку, расстояние от которой до точки $A\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ является наименьшим.

750. На координатной плоскости даны точки $A(3; -1)$ и $D(4; -1)$. Рассматриваются трапеции, у которых отрезок AD является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = 1 - x^2$, выделяемой условием $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

751. На координатной плоскости дана точка K (3; 6). Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y = 4x^2$, выделяемой условием $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а точка K — середина одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

752. Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен P, выбран цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

753. Из всех цилиндров, которые можно поместить внутри сферы радиуса R, найти цилиндр наибольшего объема.

754. Консервная жестяная банка заданного объема должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания и высотой расход жести будет наименьшим?

755. Из всех правильных треугольных призм, которые вписаны в сферу радиуса R, выбрана призма наибольшего объема. Найти высоту этой призмы.

756. Из всех конусов, вписанных в сферу радиуса R, выбран конус наибольшего объема. Найти высоту этого конуса.

757. Из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H, найти цилиндр наибольшего объема.

758. Найти экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^5 + 5$.

759. Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 3x + 2$ и построить ее график. Найти точки, в которых касательные к графику параллельны оси Ox.

760. Исследовать с помощью производной функцию $y = x^3 - 5x^2 - x + 5$ и построить ее график. Записать уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой, равной 4.

761. Исследовать с помощью производной функцию и построить ее график:

1) $y = -\dfrac{x^4}{4} + x^2$, где $x \in R$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (762–764).

762. 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$; 4) $y = x^2 + 3$, $y = x + 5$;

2) $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; 5) $y = \sqrt{x}, y = x^2$;

3) $y = 4 - x^2$, $y = 2x^2 - 8$; 6) $y = 2\sqrt{x}, 6 - y = 0, x = 0$.

763. 1) $y = 9 - x^2$, $y = (x-1)^2 - 4$; 3) $y = x^{-2}$, $y = \dfrac{17}{4} - x^2, x > 0$;

2) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x$; 4) $y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$.

764. 1) $y=\cos x;\ x=\frac{\pi}{4}, y=0;$ 3) $y=\cos x, y=x+1, y=0;$

2) $y=\sin\frac{x}{2}, y=\sqrt{x}, x=\pi;$ 4) $y=3^x, x=-1, x=1, y=0.$

7. Комбинаторика и теория вероятностей

765. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из 10 волейболистов?

766. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью укрытия награбленного необходимо выделить пятерых разбойников. Сколькими способами атаман может назначить этих пятерых так, чтобы между ними не было распрей?

767. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: *красный*, *желтый*, *зеленый*?

768. Сколькими способами можно распределить 12 разных книг между четырьмя учащимися?

769. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются 2 учащихся. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакая пара учеников не дежурила вместе дважды в течение учебного года?

770. Сколько получится различных параллелограммов при пересечении n параллельных прямых m другими параллельными прямыми?

771. Для проверки на всхожесть было посеяно 300 семян, 255 из которых проросли. Равной чему можно принять вероятность прорастания отдельного семени в этой партии? Сколько семян в среднем взойдет из 1000 посеянных?

772. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей в среднем будет содержаться в каждой партии объемом 400 шт.?

773. ОТК проверяет половину изделий некоторой партии и признает годной всю партию, если среди проверенных изделий не более 1 бракованного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованных, будет признана годной?

774. В ящике 10 деталей, 4 из которых окрашены. Сборщик наугад взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

775. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

776. Завод в среднем дает 27% продукции высшего сорта и 70% — первого сорта. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие будет или высшего, или первого сорта.

777. При каждом включении двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что для его запуска потребуется не более двух включений?

778. С первого станка на сборку поступает 40% всех изделий, со второго — 30%, с третьего — 30%. Вероятности изготовления бракованной детали для каждого станка соответственно равны 0,01; 0,03 и 0,05. Найти вероятность того, что наугад поступившая на сборку деталь бракованная.

8. Комбинированные задания

779. 1) Решить уравнение $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

2) Решить неравенство $(0,5)^{x-1} \leqslant 2^{-0,5x}$.

3) Вычислить $5 \cdot 10^{2-\log_{100} 25}$.

4) Для функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(1; -0,5)$. Вычислить значение первообразной в точке $x = 2$.

5) При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

780. 1) Решить уравнение $\sin^2 x + 0,5 \sin 2x = 1$.

2) Решить неравенство $(0,6)^{2x^2+8x} > 1$.

3) Вычислить $16^{0,5\log_4 10+1}$.

4) Для функции $f(x) = 2\sqrt{x}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(4; 10)$. Вычислить значение первообразной при $x = \sqrt[3]{9}$.

5) При каком значении первого множителя произведение будет наименьшим, если второй множитель на 3 единицы меньше второго?

781. 1) Решить уравнение $\sin x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} (2x+6)$.

3) Доказать, что функция $y = 3x^2 - 12x + 11$ при $x > 2$ возрастает.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-3x^2-x-1,\ x=-1 \text{ и } y=-15.$$

5) Решить уравнение на множестве комплексных чисел $z^3-2z^2+z-2=0.$

782. 1) Решить уравнение $\sin x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

2) Решить неравенство

$$\log_2 x+\log_2(2x-1)<\log_2(2x+2).$$

3) Доказать, что функция $y=-2x^2+4x-7$ при $x>1$ убывает.

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4x+8,\quad x=-1,\quad x=4,\quad y=3.$$

5) Найти комплексные корни уравнения $z^4-2z^3+4z-4=0.$

783. 1) Автомашина прошла 150 км по шоссе и 90 км по грунтовой дороге, по которой скорость ее движения стала меньше на 20 км/ч. С какой скоростью двигалась автомашина по грунтовой дороге, если время движения по шоссе и по грунтовой дороге одно и то же?

2) Упростить выражение $\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}.$

3) Решить уравнение

$$\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30.$$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4-x^2,\ y=2x-x^2,\ x=0.$$

5) Вычислить $(\sqrt{3}-i)^9.$

784. 1) Моторная лодка прошла вниз по течению реки 91 км и после четырехчасовой остановки вернулась обратно, затратив на всю поездку сутки. Какова скорость течения реки, если собственная скорость лодки 10 км/ч?

2) Упростить выражение $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}.$

3) Решить уравнение $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0.$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4,\quad y=x^2-6x+8\quad \text{и}\quad x=0.$$

5) Вычислить $(-1-i)^{-8}.$

785. 1) Вычислить $\frac{(4-3i)(5+5i)}{5i(1-i)}+(3-i)^2.$

2) Решить неравенство $\left|\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{x+2}\right|<1.$

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4. \end{cases}$$

4) Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = \cos x - \frac{1}{2}$.

5) Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=2x^3+3x^2-1.$$

786. 1) Вычислить $\frac{(8-6i)(3+3i)}{3i(2-2i)}+i^2(1-3i)^2$.

2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)\leqslant 0$.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$$

4) Решить уравнение $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=0$.

5) Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=-x^3+3x+1.$$

787. 1) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_2 (x-3)\leqslant 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}<8. \end{cases}$$

2) Найти четыре числа b_1, b_2, b_3, b_4, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если

$$b_1+b_4=27, \quad b_2\cdot b_3=72.$$

3) Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left(a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right).$$

4) Решить уравнение $\sin 3x+\sin 2x=\sin x$.

5) В шахматном турнире было сыграно 210 партий, при этом каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько человек участвовало в турнире?

788. 1) Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)>1, \\ 3^{1-2x}>\frac{1}{27}. \end{cases}$$

2) В арифметической прогрессии $a_6 = \frac{3}{5}a_3$, $a_6a_3 = 15$. Сколько надо взять первых членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равной $30\frac{1}{3}$?

3) Упростить выражение

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

4) Решить уравнение $3(1-\sin x) = 1+\cos 2x$.

5) Сколькими способами можно составить команду из 6 чел., из 20 чел. претендентов?

789. 1) Записать уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ в точке с абсциссой, равной 3.

2) Решить уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

3) Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha.$$

4) Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x$.

5) В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

790. 1) Записать уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 3x - 27$ в точке с абсциссой, равной -2.

2) Решить уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

3) Доказать тождество $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2}$.

4) Решить неравенство $\sqrt{x+5} \leqslant 2x$.

5) Ученик из 25 билетов выучил 20, предложенных к экзаменам. Какова вероятность того, что он знает 2 вопроса, предложенные экзаменатором?

791. 1) Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{3x-2}{2x-1}}+\frac{1}{x^2-1}.$$

2) Найти действительные числа x и y, если

$$x(1+3i)+y(2-i)=5+i.$$

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=6, \\ y^2+xy=3. \end{cases}$$

4) Упростить выражение

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

5) Решить графически уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=x^2-2x-5.$$

792. 1) Найти область определения функции

$$y=\sqrt{20-x-x^2}+\frac{1}{x-3}.$$

2) Найти свободный член приведенного квадратного уравнения с действительными коэффициентами, если один из его корней равен $\frac{1+3i}{1-3i}$.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4) Упростить

$$\left(\frac{\sqrt[3]{ab^2}\,\sqrt{b}-\sqrt[3]{ab}\,\sqrt{a}}{(ab)^{\frac{7}{6}}}+\frac{2}{\sqrt[6]{a^2b^5}}\right):\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

5) Решить графически уравнение

$$\log_2(x-1)=-x^2+4x-2.$$

793. 1) Решить уравнение $\log_4(3x-4)-\log_4(5-x^2)=0{,}5$.

2) Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 93. Если из первого ее члена вычесть 48, а остальные оставить без изменения, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Задать каждую из этих прогрессий.

3) Построить график функции $y=1-3^{x+1}$.

4) Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

5) В точках с абсциссами $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ проведены касательные к графику функции $y = \cos x$. Найти координаты точки пересечения этих касательных.

9. Задачи, предлагавшиеся на выпускных экзаменах

(для общеобразовательных и профильных классов)

794-о. 1) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(3x-5)+2>0$.

2) Найти промежутки возрастания функции $y=x-7-\sqrt{2x+3}$.

3) Решить уравнение $\cos^4 x+0{,}5\sqrt{3}=\sin^4 x$.

4) Найти все такие точки графика функции $y=\frac{4^x-2^{x+1}}{\ln 4}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = 2x + 5$.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x+3}$, $y = 2 - (x + 3)^3$ и $y = 3$.

6) Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$?

795-о. 1) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(5x-3)+1>0$.

2) Найти промежутки убывания функции

$$y=5-x+2\sqrt{x+2}.$$

3) Решить уравнение $\sin x\cos x\cos 2x=-0{,}125\sqrt{3}$.

4) Найти все такие точки графика функции $y=\frac{9^x-2\cdot 3^x}{\ln 9}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = 6x - 5$.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x}$, $y = 2 + (x - 4)^3$ и $y = 3$.

6) Сколько решений в зависимости от параметра b имеет уравнение $|x - 4| = bx + 2$?

796-о. 1) Пусть $f(x)=3x-\sqrt{x}+7$. Найти те значения x, при которых $f'(x)=1$.

2) Решить неравенство $\log_3 \frac{x-1}{x+3} \geqslant 1$.

3) Найти область определения, нули, промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 3x$. Построить график функции.

4) Найти значение выражения $\cos 2\alpha$, если α удовлетворяет условию $\sin 4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Найти наименьшее значение функции $y = e^{3x+2}(4x^2 - 5x)$ на отрезке $[0,5; 1,5]$.

6) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x+1} + 2, \quad y = 2(x-2)^3 + 2 \quad \text{и} \quad y = 1 - x.$$

797-о. 1) Пусть $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x + 7$. Найти те значения x, при которых $f'(x) = 2$.

2) Решить неравенство $\log_2 \frac{x+2}{x-1} \geqslant 2$.

3) Найти область определения, нули, промежутки монотонности и экстремумы функции $y = 2x^3 - 3x^2$. Построить график функции.

4) Найти значение выражения $\sin 3\alpha$, если α удовлетворяет условию $\sin 6\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Найти наибольшее значение функции $y = e^{2x-3}(3x^2 + 4x)$ на отрезке $[-2,5; -1,5]$.

6) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x$, $y = -\sqrt{x+2}$ и $y = 2(x+1)^3 + 2$.

798-п. 1) Решить уравнение $\sin x \sin 3x = 0,5$.

2) Решить неравенство $\log_9 x^2 + \log_3^2(-x) < 2$.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 64, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 4x$ и касательной к этому графику в его точке с абсциссой 2.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3\cos x - 4\sin x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

6) Сравнить без таблиц и микрокалькулятора числа $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

799. 1) Решить уравнение $\cos x \cos 3x = -0{,}5$.

2) Решить неравенство $\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 9, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 9x - x^3$ и касательной к этому графику в его точке с абсциссой 3.

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - 3\sin x + 4\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6) Сравнить без таблиц и микрокалькулятора числа $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

800. 1) Решить уравнение $\cos 4x + 5\cos^2 x = 0{,}75$.

2) Найти производную функции $y = \log_{9x+1}(3x+7)$ в точке $x = 1$.

3) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 3\cos 2x + 3\sin 3x + 8$, осью абсцисс и прямыми $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.

4) Найти множество значений функции

$$y = 3x + \sqrt{7 - 2x}.$$

5) Решить неравенство $4^x + 6 \cdot 2^{|x|} \geqslant \frac{49}{4}$ и указать наименьшее натуральное число, ему удовлетворяющее.

6) На прямой $y = 2x - 1$ найти все такие точки, что через каждую из них проходит ровно две касательные к графику функции $y = x^2$ и угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

801. 1) Решить уравнение $\cos 4x + 3\sin^2 x = 0{,}25$.

2) Найти производную функции $y = \log_{3x+4}(7x-4)$ в точке $x = 2$.

3) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 2\cos 3x - 5\sin 2x + 10$, осью абсцисс и прямыми $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$.

4) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{6x - 7} - 2x.$$

5) Решить неравенство $9^{|x|} + 6 \cdot 3^x \geqslant 11$ и указать наименьшее натуральное число, ему удовлетворяющее.

6) На прямой $y = 6x - 9$ найти все такие точки, что через каждую из них проходят ровно две касательные к графику функции $y = x^2$ и угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ

1. Уравнения

Решить уравнение (802–811).

802. 1) $\sqrt{2x+8}=\sqrt{2x-4}+2\sqrt{3x-3}$;

2) $\sqrt{12-x}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+6}$;

3) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$;

4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

803. 1) $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^x$;

2) $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x-5\cdot 25^x=0$;

4) $4\cdot 9^x+12^x-3\cdot 16^x=0$.

804. 1) $\lg(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)-\lg 25=x$;

2) $\lg(2^x+x-4)=x-x\lg 5$.

805. 1) $\log_2 x+\log_3 x=\dfrac{1}{\log_6 3}$;

2) $\log_3 x^3+\log_2 x^2=\dfrac{2\lg 6}{\lg 2}+1$.

806. 1) $2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x)$;

2) $2\log_2\dfrac{x-7}{x-1}+\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=1$;

3) $\log_3(3^x-8)=2-x$;

4) $4^{\log_2(1-x)}=2x^2+2x-4$.

807. 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$;

3) $1+\log_6\dfrac{x+3}{x+7}=\dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$.

808. 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$;

2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

809. 1) $\log_5(3\cdot 2^{1+x}-2^{-x}\cdot 5^{2x+1})-x=\log_5 13$;

2) $\log_6\left(3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}\right)+\dfrac{1}{x}=\log_6 5$.

810. 1) $2\cdot 2^{2x}+18\cdot 2^{-2x}-11\cdot 2^x-33\cdot 2^{-x}+26=0$;

2) $3^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{3-x}{2}}=315$.

811. 1) $\log_2 \log_3 (2x+3)+\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{2x+3}=1$;

2) $\log_2 (\log_2 x) = 1 + \log_2 (1 + \log_x 16)$.

812. При каких значениях m равносильны уравнения:

1) $3x + 2 = 17$ и $mx + 7 = 12$;

2) $x^2 - 7x + 10 = 0$ и $(x - 2)(x + m) = 0$?

Решить уравнение (813–822).

813. 1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$;

2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}\cos 2x$;

3) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2}-2\sin x)\sin x$.

814. 1) $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0$;

2) $6\cos 2x\sin x + 7\sin 2x = 0$;

3) $\sin 7x + \sin 5x = 4\sin 3x$.

815. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

2) $\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2$;

3) $2\cos 2x = \sin 3x\sin x - \sin^2 3x$.

816. 1) $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x$;

2) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$;

3) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

817. 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2\,\mathrm{tg}\, x + 1$;

2) $\sin 2x - \cos 2x = \mathrm{tg}\, x$;

3) $5\sin x+\frac{3}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\cos 2x-3\sin^2 x$.

818. 1) $(1 + \cos x)\,\mathrm{ctg}\, x = \sin 2x$;

2) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{5}{9}$;

3) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\cos\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$.

819. 1) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, 2x = 2\,\mathrm{ctg}\, 4x$; 2) $\mathrm{tg}\, 2x + \mathrm{ctg}\, x + 8\cos^2 x$;

3) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 3x}$.

820. 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$;

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x$; 4) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

821. 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$;

4) $\frac{\sin 4x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

822. 1) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg} 4x$; 3) $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin 9x = 1$;

2) $\cos^2 x = 2 - \cos x \cos 7x$; 4) $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1$.

823. 1) При каких значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет корни? Найти эти корни.

2) При каких значениях a уравнение $2a^2 + \cos^2 x = 1 + a \sin x$ имеет корни? Найти эти корни.

824. 1) При каких целых значениях m уравнение $(m-7)x^2 + 2(m - 7)x + 3 = 0$ не имеет действительных корней?

2) При каком значении k уравнения $x^2 - 5x + k = 0$, $x^2 - 7x + 2k = 0$ имеют только один общий корень?

825. 1) Найти все действительные значения p, при которых корни квадратного уравнения $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$ действительны и положительны.

2) Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4px + 7p^2 = 0$ равна 2. Найти p.

3) При каких значениях p сумма квадратов корней уравнения $x^2 - px + p - 3 = 0$ является наименьшей?

826. При всех значениях параметра a решить уравнение и определить, при каких значениях a уравнение имеет ровно два корня:

1) $|x+3| - a|x-1| = 4$; 3) $3|x-2| - a|2x+3| = 10{,}5$;

2) $|x-2| + a|x+3| = 5$; 4) $a|x+3| + 2|x+4| = 2$.

827. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2 + \left|\frac{2x+3}{15x}\right| = a$ имеет единственное решение. Если таких значений несколько, записать их сумму.

828. Найти все корни уравнения $\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 1$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

829. Найти все корни уравнения $\cos x + (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

830. Найти все корни уравнения $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{25\pi}{6}$, удовлетворяющие неравенству $\lg(x - \sqrt{2x+24}) > 0$.

831. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a \cdot 25^{x^2} - (2a+3) \cdot 5^{x^2} + 6a = 0$ имеет четыре разных корня.

2. Системы уравнений

832. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases}(2-a)(x+y)=3a,\\(2-a)xy=2a\end{cases}$$

имеет такие решения, что $x>0$ и $y>0$?

833. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases}3x^2y^2+x^2-3xy-7=0,\\10x^2y^2+3x^2-20xy-3=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{8y-x}+x=2,\\\sqrt{3y-x}+x+y=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6,\\\sqrt{x+y}-y+x=2;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+y=4+\sqrt{y^2+2},\\\lg x-2\lg 2=\lg\left(1+\dfrac{y}{2}\right),\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0,\\x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0;\end{cases}$

6) $\begin{cases}8x^2-2xy-y^2-30x-9y-8=0,\\8x^2+6xy+y^2-2y-8=0;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\log_2(x^2y+2xy^2)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4,\\\log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\log_3\left(\dfrac{x^2}{y}+x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^2}{x}+y\right)=2,\\\log_2|\,x+y\,|=1.\end{cases}$

Решить систему уравнений (834—835).

834. 1) $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{2},\\\sin y\cos x=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sin^2 x=\cos x\cos y,\\\cos^2 x=\sin x\sin y;\end{cases}$

3) $\begin{cases}4\sin x\sin y=3,\\\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2,\\\cos x\cos y=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

5) $\begin{cases}4\sin x-2\sin y=3,\\2\cos x-\cos y=0;\end{cases}$

6) $\begin{cases}6\cos x+4\cos y=5;\\3\sin x+2\sin y=0.\end{cases}$

835. 1) $\begin{cases}9\cos x\cos y-5\sin x\sin y=-6,\\7\cos x\cos y-3\sin x\sin y=-4;\end{cases}$

2) $\begin{cases} 3\sin x\cos y-7\cos x\sin y=6, \\ 7\sin x\cos y+5\cos x\sin y=-2. \end{cases}$

836. Найти все значения параметра a, при которых данная система имеет ровно одно решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+40)^2+(y-9)^2}+41, \\ \dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{80}=1. \end{cases}$$

837. При каких значениях a система уравнений:

$$\begin{cases} \log_3(y-3)-2\log_9 x=0, \\ (x+a)^2-2y-5a=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

3. Неравенства

Решить неравенство (838–844).

838. 1) $3-x>3\sqrt{1-x^2}$;

2) $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$;

3) $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$;

4) $\sqrt{5x-x^2-5}<3+2x$;

5) $\sqrt{x^2+x-12}<6-x$.

839. 1) $0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5$;

2) $25\cdot 0{,}04^{2x}>0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\dfrac{4^x}{4^x-3^x}<4$;

4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-32\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x^2-1}<0$;

5) $\sqrt{4^{x+1}+17}-5>2^x$.

840. 1) $3^{|x-2|}<9$;

2) $4^{|x+1|}>16$;

3) $3^{|x-1|}>3^x$;

4) $3^{|x+1|}<9^x$;

5) $2^{|x-2|}>4^{|x+1|}$;

6) $5^{x-4}<25^{|x|}$.

841. 1) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}<1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}<0$;

3) $2\log_4(x+2)-\log_4(x+5)<1$;

4) $\log_3(2-3^{-x})<x+1-\log_3 4$;

5) $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$;

6) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<0$;

7) $\log_2\dfrac{x^2-2x-1}{x+2}\leqslant 1$;

8) $\log_3\dfrac{x+4}{x-2}-\log_3\dfrac{4x+11}{5x+1}<1$.

842. 1) $4\sin x\cos x \leqslant 1$;

3) $\cos^2 x > \frac{1}{4}$;

2) $3\sin x > 2\cos^2 x$;

4) $\mathrm{tg}^2 x \leqslant 3$.

843. 1) $\sin^2 x \geqslant \frac{1}{2}$;

2) $\sin^2 x < \frac{1}{4}$;

3) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;

4) $\sin^2 x > \frac{1}{4}$;

5) $\cos^2 x < \frac{1}{2}$;

6) $\cos^2 x > \frac{3}{4}$;

7) $\mathrm{tg}^2 x < 1$;

8) $\mathrm{tg}^2 x \geqslant 3$.

844. 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$;

4) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$;

2) $\cos^2 x - \cos x < 0$;

5) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

3) $2\sin^2 x - \sin x - 3 < 0$;

6) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

845. Найти все значения a, при которых данное неравенство является верным при всех значениях x:

1) $\frac{8x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 2x + 1} \leqslant a$;

2) $\frac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geqslant a$.

846. Найти все значения a, при которых неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 1) < 1$ выполняется для всех x из промежутка $x < 0$.

847. При всех a решить неравенство $|x - 5a| \leqslant 4a - 3$ и указать все значения a, при которых решения этого неравенства являются решениями неравенства

$$x^2 - 4x - 5 < 0.$$

848. Найти все значения параметра a, при которых данная система неравенств имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 256 \leqslant 0, \\ ax^2 + 325x + a \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Преобразования

849. Определить знак выражения:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$;

2) $\sin 5 - \frac{1}{2}\cos 1 + \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}$.

Доказать тождество (850–851).

850. 1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;

2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$;

3) $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin 2\alpha$.

851. 1) $\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)}=2\operatorname{ctg}\beta$;

2) $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$;

3) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

852. 1) Доказать, что $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

2) Доказать, что значение выражения $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-$ $-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ не зависит от β.

853. Доказать, что $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=2+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

Вычислить (854–856).

854. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$;

2) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;

3) $\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$;

4) $\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)$;

5) $\arcsin(\sin 6)$;

6) $\arcsin(\sin 7)$.

855. 1) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{7}\right)$;

2) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

4) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$;

5) $\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$;

6) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $\arccos(\cos 5)$;

8) $\arccos(\cos 7)$.

856. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-1,5))$;

4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,3)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}\right)$;

6) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$;

7) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$;

8) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6)$.

5. Функции и графики

857. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $3\sin x + 4\cos x$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

858. Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin\frac{x}{2}$; 2) $y = \arccos\frac{x+1}{3}$.

859. Построить график функции:

1) $y = -2^x$; 2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $y = 2^{|x|}$; 4) $y = 3^{-|x|}$.

860. Указать один промежуток, на котором данная функция обратима, и найти функцию, обратную данной на этом промежутке:

1) $y = -(x-1)^2 + 2$; 3) $y = |x| + 1$;

2) $y = x^2 - 5x + 6$; 4) $y = |x-1|^2$.

861. Доказать, что при $a \neq 0$ функция, обратная линейной функции $y = ax + b$, также является линейной.

Построить график функции (862–871).

862. 1) $y = \frac{2}{x-1} + 3$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$.

863. 1) $y = x^2 - |x| + 2$; 3) $y = |x-2| \cdot x$;

2) $y = \frac{|x-2|}{x-2}(x^2 - 1)$; 4) $y = |x^2 - 7x + 12| - 1$.

864. 1) $y = 2^{x+|x|}$; 2) $y = |3^{|x|} - 3|$.

865. 1) $y = \log_2|3-x|$; 2) $y = |\log_3 x|$.

866. 1) $y = 2\sin|x|$; 2) $y = |\cos x|$.

867. 1) $y = x^3 - 4x^2 + x + 6$; 2) $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

868. 1) $y = x + \frac{1}{2x}$; 2) $y = \frac{x}{x^2-4} + 1$.

869. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \frac{1}{1-x^2}$.

870. 1) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; 2) $y = \sqrt{\lg\sin x}$.

871. 1) $y = |\cos 2x|$; 3) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

2) $y = \frac{1}{\sin x}$; 4) $y = \arcsin(\sin x)$.

872. Доказать, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ симметричен относительно:

1) точки $(\pi; 0)$; 2) точки $(-\pi; 0)$.

873. Доказать, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ симметричен относительно:

1) точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 2) точки $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$.

874. Доказать, что график функции $y = \sin x$ симметричен относительно:

1) прямой $x = \frac{3\pi}{2}$; 3) точки $(\pi; 0)$;

2) прямой $x = -\frac{\pi}{2}$; 4) точки $(-\pi; 0)$.

875. Доказать, что график функции $y = \cos x$ симметричен относительно:

1) оси ординат; 4) точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

2) прямой $x = \pi$; 5) точки $\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$;

3) прямой $x = -\pi$; 6) точки $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

6. Комплексные числа

876. Построить окружность (z — комплексное число):

1) $|z - 1 - i| = 2$; 3) $|z + 1 + 2i| = 1$;

2) $|z + 2 - 3i| = 3$; 4) $|z - 2 + 2i| = 3$.

877. Построить прямую (z — комплексное число):

1) $|z + i| = |z + 2|$; 3) $|z + 1 + i| = |z - 1 + 2i|$;

2) $|z + 2i| = |z - 3|$; 4) $|z + 2 - 2i| = |z - 1 - 3i|$.

878. Найти расстояние между двумя точками:

1) $2i$ и -3; 2) $-3i$ и 4; 3) $3i$ и $3 - i$;

4) $-3i$ и $8 - 3i$; 5) $2 + i$ и $3 - i$; 6) $-3 + i$ и $-3 - 2i$.

879. Доказать, что множество точек, удовлетворяющих данному уравнению, является прямой; построить эту прямую:

1) $z + \bar{z} = -4$; 2) $z - \bar{z} = -2i$.

Решить уравнение (880—881).

880. 1) $z + 2\bar{z} = 3 + i$; 2) $3z - \bar{z} = -4 + 2i$.

881. 1) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$; 2) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.

882. Доказать, что число $\frac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$, $z \neq -1$.

883. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

1) $\bar{z} = z$; 2) $z + |z| = 0$; 3) $z^2 + |z| = 0$; 4) $|z| - z = 1 + 2i$.

884. Решить систему уравнений (на множестве комплексных чисел):

$$\begin{cases} |z-2| = |z+2|, \\ |z-i| = |z+i|. \end{cases}$$

7. Производная и интеграл

885. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке:

1) $F(x) = \cos^2 x,\ f(x) = -\sin 2x,\ x \in R$;

2) $F(x) = \dfrac{x}{x+1},\ f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2},\ x < -1$;

3) $F(x) = \dfrac{1}{x},\ f(x) = \ln|x|,\ x \neq 0$;

4) $F(x) = \sqrt{-x},\ f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}},\ x < 0$.

Найти первообразные для функции **(886–887)**.

886. 1) $\dfrac{x}{x-3}$; 2) $\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $x\sqrt{x+2}$;

4) $(x-1)\sqrt{x+1}$; 5) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-3}}$; 6) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$.

887. 1) $\cos^2 x$; 2) $\sin 3x \cos 3x$; 3) $\sin 3x \cos 5x$;

4) $\sin x \sin 3x$; 5) 2^{-5x}; 6) 3^{2x}.

Вычислить **(888–889)**.

888. 1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x)\, dx$.

889. 1) $\int\limits_{4}^{5} \dfrac{x+2}{(x-3)(x^2-x-6)}\, dx$; 4) $\int\limits_{-5}^{-2} \dfrac{x}{x+1}\, dx$;

2) $\int\limits_{3}^{4} \dfrac{x+1}{x-2}\, dx$; 5) $\int\limits_{1}^{2} 15x\sqrt{x-1}\, dx$;

3) $\int\limits_{-3}^{-1} \dfrac{1}{x}\, dx$; 6) $\int\limits_{-3}^{0} \dfrac{x+2}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

890. Найти точку, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x + 5$ параллельна прямой $y = x$, и написать уравнение этой касательной.

891. В точке с абсциссой a, где $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$, построена касательная к графику функции $y = \sqrt{x}$.
Найти значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 3$, будет наименьшей, и вычислить эту наименьшую площадь.

892. Дана фигура, ограниченная кривой $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку (0; 0), чтобы эта прямая разбивала данную фигуру на две фигуры равной площади?

893. Дана криволинейная трапеция, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В какой точке данной параболы следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

894. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 4\sqrt{x}$ и $y = 2x$; 2) $y = 8\sqrt{x}$ и $y = x^2$.

895. Найти площадь фигуры, ограниченную:

1) графиком функции $y = \cos x$, отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки (0; 1) и $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

2) графиком функции $y = \sin x$, отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

3) графиком функции $y = x\sqrt{x+1}$ и осью Ox;

4) графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

896. График функции $y = f(x)$, где $f(x) = -2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5$, $a < 0$, и прямая l, заданная уравнением $y = 4a^2x + 5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y = f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

897. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=x^3+2ax^2+\frac{5}{4}a^2x+1$, $a<0$, и прямая l, заданная уравнением $y=\frac{a^2x}{4}+1$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{4}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.

898. Графику функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0; 2)$, а другая — через точку $(0; 6)$. Найти значения a, b и c.

899. Фигура M на плоскости $(x; y)$ ограничена графиками функций $y=9e^{-ax}$ и $y=15-4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-18x+9$. Найти a и площадь фигуры M.

900. Фигура M на плоскости $(x; y)$ ограничена графиками функций $y=2e^{ax}$ и $y=7-3e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=4x+2$. Найти a и площадь фигуры M.

901. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y'=3y$, $y(0)=1$; 2) $y'=-y$, $y(0)=2$.

902. 1) Вычислить работу, которую надо затратить на сжатие пружины на 3 см, если сила 2 Н сжимает эту пружину на 1 см.

2) Вычислить работу, которую нужно затратить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см.

903. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из цилиндрической цистерны, заполненной водой. Радиус основания цистерны равен R, а высота h.

8. Прогрессии

904. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти ее знаменатель.

905. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

906. Найти четыре числа, первые три из которых — последовательные члены арифметической прогрессии, а последние три — геометрической. Сумма крайних чисел равна 11, а сумма средних чисел 10.

907. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма первого и пятого членов которой равна 34, а произведение первого и девятого членов равно 4.

908. В геометрической прогрессии сумма первого и n-го членов равна 6, а сумма первых n членов 63. Найти n, если известно, что при умножении каждого члена прогрессии на номер этого члена получаются последовательные члены арифметической прогрессии.

909. Найти четыре числа, обладающие следующими свойствами: сумма первого и четвертого чисел равна 11, а сумма второго и третьего 2; первое, второе и третье числа — последовательные члены арифметической прогрессии; второе, третье и четвертое числа — последовательные члены геометрической прогрессии.

9. Задачи на составление уравнений

910. Два тела движутся с постоянными скоростями по окружности длиной 1,2 м. Если одно из них движется в том же направлении, что и другое, то оно настигает другое каждые 60 с; если же тела движутся в разных направлениях, то они встречаются каждые 15 с. Найти скорости движения тел.

911. Кусок материи стоит 35 р. Если бы в куске было на 4 м материи больше, а каждый метр стоил на 1 р. дешевле, то стоимость куска материи осталась бы прежней. Сколько метров материи было в куске?

912. Бассейн может наполняться водой из двух кранов. Если первый кран будет открыт в течение 10 мин, а второй — в течение 20 мин, то бассейн будет наполнен. Если первый кран будет открыт в течение 5 мин, а второй — 15 мин, то заполнится $\frac{3}{5}$ бассейна. Определить, сколько времени надо для наполнения бассейна каждым краном в отдельности.

913. Бассейн был наполнен несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались один за другим через равные промежутки времени. Последний насос перекачал v литров воды. Сколько воды перекачал первый насос, если известно, что при уменьшении производительности каждого насоса на 10% (при таких же промежутках между включениями) время наполнения увеличится на 10%?

914. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Они встретились на расстоянии 4 км от B, и в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист находился на расстоянии 15 км от A. Определить расстояние от A до B (скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны).

915. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист встретил первого пешехода через 0,3 ч после выезда из A, а второго догнал спустя час после момента проезда через B. Определить время движения велосипедиста от A до B (скорости велосипедиста и пешеходов постоянны).

916. Расстояние между пунктами A и B, расположенными на берегу реки, равно 25 км. Из A и B одновременно отправились катер и лодка. Катер безостановочно курсирует между A и B. Через некоторое время из B в A отправилась вторая лодка, прибывшая в A одновременно с десятым выходом оттуда катера. При движении от A до B девятый раз катер встретил вторую лодку, пройдя 3 км, а первую догнал, пройдя 24 км от A. Определить расстояния, пройденные лодками до их встречи (скорости лодок и катера относительно воды, а также скорость реки, постоянны).

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

К главе I

1. 2) Нет; 4) да. **2.** 2) Область определения — $[-2; 5]$; множество значений — $[-3; 0)$; $[2; 6]$; 4) область определения — $[-6; 3]$; множество значений — $(-3; 1]$. **3.** 2) Область определения — все действительные числа; множество значений — $(-\infty; 4]$; 4) область определения — $x \neq -1$; множество значений — $y \neq 1$. **5.** 1) (1); 2) $x = 3$; 3) $x = -1$; 4) $x = -1$; 5) (1); (2). **6.** 2) а) Нет; б) нет; в) $x > 2$, $0 < x \leqslant 2$; 4) а) да; б) да; в) все действительные числа. **7.** 2) Нет. **9*.** 1) 0; 2) 1; 3) 6; 4) 0. **11.** 2) 5; 4) $6x-5$. **12.** 2) 4; 4) -7. **13.** 2) 5. **14.** 2) 3. **15.** 2) $v(2)=0{,}3$; $v(8)=0{,}3$. **16.** 2) $10t$. **17.** 2) 2,63. **18.** 2) $2x-1$; 4) $-34x$; 6) $1{,}5x^2$; 8) $16x$. **19.** 2) $10x+6$; 4) $1-6x$; 6) $-6x^2+18$; 8) $-9x^2+4x-1$. **20.** 2) $f'(0)=-2$; $f'(2)=10$; 4) $f'(0)=1$; $f'(2)=5$. **21.** 2) $x=1{,}5$; 4) $x_1=1$, $x_2=-\frac{7}{3}$; 6) $x=-0{,}5$; 8) $x=-1$. **22.** 2) $5x^4-4x^3+3x^2-2x$; 4) $9x^2-6x$. **23.** 2) 44. **24.** 2) $4x-1$, $x \neq 1$. **25.** 2) 1; 4) $-\frac{5}{18}$. **26.** 2) $f(g(x))=\lg\sqrt{x}$; 4) $f(g(x))=x$. **27.** 2) $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$; 4) $x \in R$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. **28.** 2) $2(x+3)$; 4) $3x^5(3x-2)(x-1)^2$. **29.** 2) $x > 2$; 4) $x < 0$, $x > \frac{4}{9}$; 6) $-3 < x < -\frac{1}{3}$. **30.** 2) $x < 0$, $x > 2$. **31.** $x > 0{,}5$. **32.** 2) $f(g(x))=|\sin x|$. **33.** 2) $3(3x^8-16x^7+49x^6-76x^5+65x^4-16x^3-33x^2+20x+12)$. **34.** $a \geqslant 3$. **35.** $a < -12$. **36.** 2) $10x^9$; 4) $21x^2-21x^6$; 6) $-\frac{12}{x^5}$; 8) $3x^2-\frac{2}{x^3}$. **37.** 2) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$; 6) $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; 8) $\pi x^{\pi-1}$. **38.** 2) $f'(3)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{9}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 4) $f'(3)=\frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1)=3$. **39.** 2) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-4$, 4) $x=0$; 6) $x_{1,2}=\pm 1$; 8) $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=\frac{3}{7}$. **40.** 2) 192; 4) 31,5. **41.** $x_1=3$, $x_2=-0{,}4$, $x_3=1\frac{5}{11}$. **42.** 2) $\frac{2\sqrt{x}(x^3-2x-1)-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$. **43.** 2) $-\frac{18}{7x^7}$; 4) $-6x^{-\frac{5}{2}}$; 6) $\frac{4}{7\sqrt[7]{x^5}}+\frac{6}{5x\sqrt[5]{x^2}}$; 8) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^2\sqrt[4]{x^3}}$. **44.** 2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; 8) $1-\frac{5}{3\sqrt[6]{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **45.** 2) $(x-1)^3(x+1)^5 \times (11x-3)$; 4) $\frac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. **46.** 2) $\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{(x+2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. **47.** 2) $x_1=0$, $x_2=-1$; 4) $x=2$; 6) $x=3$. **48.** 2) $-1 < x < 0$, $x > 2$; 4) $x > 2$; 6) $x > 1$.

49. 3,5 рад/с. 50. 902,5 Дж. 51. 2) 103 г/см. 52. $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. 53. 2) $\frac{1}{x}+$ $+\cos x$; 4) $e^x-\cos x$; 6) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x$; 8) $-\frac{2}{x^3}+e^x$. 54. 2) $-2\sin x$; 4) $-\frac{4}{x}$; 6) $\frac{3}{10}e^x$; 8) $-3\cos x$. 55. 2) $24x^3-9e^x$; 4) $2x^7+3\cos x$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+4\sin x$; 8) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^4}$.
56. 2) $-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+16e^x$; 4) $-\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4}\cos x$; 6) $4\sqrt[3]{x}-\frac{3}{x}$; 8) $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}-5\sin x$.
57. 2) $6x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\sin x$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x}$; 6) $16x^7-3x^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\cos x$; 8) $-\frac{5}{2}x^{-\frac{11}{6}}+4x^{-\frac{9}{5}}-\frac{1}{4}e^x$. 58. 2) $\frac{1}{2}x-e^x+2\cos x$; 4) $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\sin x$; 6) $3x^2+8x+$ $+4+\frac{2}{x}+3\sin x$; 8) $4x+5+e^x-\cos x$. 59. 2) $7(x-4)^6$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$; 6) $-\frac{3}{(x-1)^4}$; 8) $-\frac{1}{(x-4)\sqrt[3]{x-4}}$. 60. 2) $30(5x-4)^5$; 4) $-21(1-3x)^6$; 6) $-\frac{24}{(3x-1)^3}$; 8) $\frac{15}{(4-3x)^6}$.
61. 2) $-\frac{2}{\sqrt[4]{(2-8x)^3}}$; 4) $\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$; 6) $-\frac{2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$; 8) $\frac{15}{(2-9x)\sqrt[3]{2-9x}}$.
62. 2) $-7\sin 7x$; 4) $\cos(x-2)$; 6) $-e^{-x}$; 8) $\frac{1}{x}$. 63. 2) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$; 4) $\frac{1}{x+2}$; 6) $-\sin(x+1)$; 8) $\frac{2}{3}\cos\frac{2x}{3}$. 64. 2) $-3\sin(3x-4)$; 4) $-\frac{3}{4}\cos\left(2-\frac{3x}{4}\right)$; 6) $\frac{1}{3}\sin\frac{1-x}{3}$; 8) $\frac{2}{5}\cos\frac{2x+3}{5}$.
65. 2) $5e^{5x-7}$; 4) $\frac{4}{4x-3}$; 6) $-\frac{2}{3}e^{\frac{5-2x}{3}}$; 8) $-\frac{2}{2x+7}$. 66. 2) $4^x\ln 4$; 4) $7^{x-3}\ln 7$; 6) $\frac{1}{x\ln 4}$; 8) $\frac{1}{(x+3)\ln 10}$. 67. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; 4) $x=-1$; 6) $x=0$; 8) корней нет. 68. 2) $-\frac{1}{2\sqrt{6(1-x)}}+\frac{10}{2-5x}$; 4) $-e^{\frac{2-x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$; 6) $\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-x)^4}}+\sin\frac{x-2}{3}$; 8) $-\frac{3}{2(x+2)\sqrt[4]{(x+2)^3}}-e^{\frac{x-4}{5}}$. 69. 2) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(1-2x)e^{-x}$; 4) $2e^{3-2x}(\sin(3-2x)-\cos(3-2x))$.
70. 2) $\frac{\sqrt{3}(1+3^x)-2x\sqrt{3}\cdot 3^x\ln 3}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$; 4) $\frac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$. 71. 2) $\frac{1}{x^2\ln 2}\times$ $\times\left(x2^x\ln 2-\frac{1}{\ln 2}-2^x+\log_2 x\right)$; 4) $\sin x+\cos x$, $\operatorname{tg} x\neq 1$. 72. 2) $x=4$; 4) $x_1=1$, $x_2=4$; 6) $x=8$; 8) корней нет. 73. 2) x — любое действительное число; 4) $x>2$; 6) $x>3$. 74. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\frac{6}{5\sqrt{2}}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. 75. 2) 2. 76. $2+2\pi$. 77. 2) $f'(x)=0$ при $x=e^{-1}$, $f'(x)>0$ при $x>e^{-1}$, $f'(x)<0$ при $0<x<e^{-1}$; 4) $f'(x)=0$ при $x=1$, $f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$

при $0 < x < 1$. **78.** $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. **79.** 2) $y = 3x + 7$; 4) $y = -2x + 2$; 6) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$; 8) $y=-\frac{1}{2}x$. **80.** 2) $y = x + 5$; 4) $y = -x - 2$; 6) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}-5$; 8) $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}-3$. **81.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3; 6) 1. **82.** 2) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{6}$; 8) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **83.** $f'(x) > 0$ в точке A; $f'(x) = 0$ в точке B; $f'(x) < 0$ в точке C; $f'(x) > 0$ в точке D. **84.** 2) $y = -11x + 12$; 4) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$; 6) $y = x + 1$; 8) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **85.** 2) $y = -4x + 2$; 4) $y=\frac{1}{3}x+1$; 6) $y = 1$; 8) $y = x$. **86.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{4}$; 8) $\frac{\pi}{6}$. **87.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **88.** 2) $y = 0$; 4) $y = 2x$; 6) $y=\frac{1}{2}x+1$. **89.** 2) (1; 2); 4) $\left(1;-\frac{2}{3}\right)$, (−3; 6); 6) (1; 2); 8) $(\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. **90.** (4; 2), (0; −1) **91.** (1; −1), $y = 2x - 3$; (1; 0), $y = 2x - 2$. **92.** 1) $y = 1 + \pi - x$; 2) $y = 3 - 2x$. **93.** 2) Возрастает при $x > 0{,}3$, убывает при $x < 0{,}3$; 4) возрастает при $x > 5$, убывает при $x < 5$; 6) возрастает при $x < -2$ и при $x > 3$, убывает при $-2 < x < 3$. **94.** 2) Возрастает при $x < 1$; убывает при $x > 1$; 4) возрастает при $-1 < x < 0$ и при $x > 1$, убывает при $x < -1$ и при $0 < x < 1$. **95.** 2) Убывает на интервалах $x < 0$ и $x > 0$; 4) возрастает при $x > 5$; 6) возрастает на интервалах $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$, убывает на интервалах $\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$. **96.** 2) Возрастает на интервале $0 < x < 3{,}2$, убывает на промежутках $x < 0$ и $x > 3{,}2$; 4) возрастает на промежутке $x<\frac{1}{3}$, убывает на промежутке $x>\frac{1}{3}$. **97.** Возрастает на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 3$, убывает при $-5 \leqslant x \leqslant -1$, $3 \leqslant x \leqslant 5$. **98.** 2) $a \geqslant 1$. **100.** 2) $x = 7$; 4) $x_{1,2} = \pm 6$; 6) $x = 0$; 8) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **101.** 2) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. **102.** 2) $x = -6$ — точка минимума; 4) $x = -8$ — точка максимума, $x = 8$ — точка минимума; 6) $x = 0$ — точка максимума, $x = -2$ и $x = 2$ — точки минимума; 8) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ — точки максимума, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ — точки минимума. **103.** 2) Точек экстремума нет; 4) точек экстремума нет; 6) $x = -1$ — точка максимума. **104.** Возрастает при $-6 \leqslant x \leqslant -4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; убывает при $-7 \leqslant x \leqslant -6$, $-4 \leqslant x < 0$; точка максимума — $x = -4$, точки минимума — $x_1 = -6$, $x_2 = 0$. **105.** 2) $x=6\frac{1}{4}$. **108.** 2) См. рис. 83; 6) см. рис. 84. **111.** 2) См. рис. 85. **114.** Один. **115.** 2) 91 и 3; 4) 9 и −2. **116.** 2) 3,5 и 0; 4) 2 и −0,25. **117.** 2) 1,5 и −3.

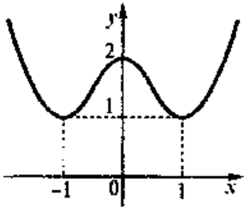

Рис. 83

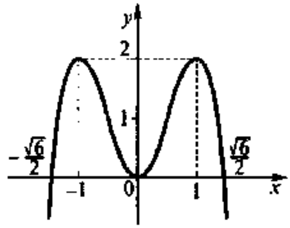

Рис. 84

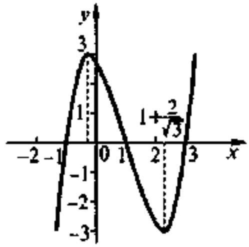

Рис. 85

118. 2) 1; 4) −2. **119.** 2) 4. **120.** 50 = 25 + 25. **121.** 625 = 25 · 25. **122.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **123.** Квадрат со стороной 3 см. **124.** 2) $2 + \ln 7$ и 1. **125.** 2) $2+\frac{1}{e^2}$ и 1. **126.** 2) $\sqrt{2}$ и 1. **127.** 2) 1; 4) −1. **128.** 2) $-4\sqrt{2}$; 4) 1. **129.** 2) 1; 4) 2; 6) 3. **130.** 2) −7 и 8. **131.** 4. **132.** $x = a$. **133.** $\frac{a}{6}$. **134.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **135.** Куб со стороной $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **136.** −2. **137.** $\frac{p}{\pi+4}$. **138.** 2) $x(6 - x^2)\sin x + 6x^2\cos x$; 4) $12x^2 - 18x$. **139.** 2) Выпукла вниз на всей числовой оси; 4) выпукла вверх на интервалах $x < -1$, $0 < x < 1$, выпукла вниз на интервалах $-1 < x < 0$, $x > 1$. **140.** 2) $x = 2$; 4) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{6}$. **142.** 2) Нет; 4) нет. **143.** 2) $-5x^4 + 6x^2 - 6x$; 4) $-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $-21(4 - 3x)^6$; 8) $\frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$; 10) $-3\sin 3x$. **144.** 2) $-\sin x - \frac{1}{x}$; 4) $24x^3 - 9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2x}$. **145.** 2) $2e^{2x}-\frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3}+3e^{1-3x}$. **146.** 2) $x^2(1 + 3\ln x)$; 4) $\sin 2x + 2x\cos 2x$; 6) $e^x(\cos x - \sin x)$. **147.** 2) $\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$. **148.** 2) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; 4) $-4\cos^3 x\sin 2x$. **149.** 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x=\frac{4}{9}$, $f'(x) > 0$ при $0<x<\frac{4}{9}$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и при $x>\frac{4}{9}$; 4) $f'(x) = 0$ при $x = 4$, $x = -3$ и $x = 1{,}2$, $f'(x) > 0$ при $x < -3$, $-3 < x < 1{,}2$ и $x > 4$, $f'(x) < 0$ при $1{,}2 < x < 4$; 6) $f'(x) = 0$ при $x = 1$, $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и при $0 < x < 1$. **150.** 2) e; 4) 0,5. **151.** 2) $y = 30x - 54$; 4) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **152.** $s(4) = 22$ м, $v(4) = 7$ м/с. **153.** 2) Возрастает на промежутках $x < -1$ и $x > 2$, убывает на интервале $-1 < x < 2$; 4) убывает на промежутках $x < 3$ и $x > 3$. **154.** 2) $x_1 = 0$,

$x_{2,3}=\pm 0{,}5$; 4) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in \mathbb{Z}$. **155.** 2) $x=1$ — точка минимума. **156.** 2) $x=0$ — точка максимума, $y(0)=-3$; $x=2$ — точка минимума, $y(2)=-12{,}6$. **159.** 2) Наибольшее значение равно 0, наименьшее значение равно -4; 4) наибольшее значение равно 14, наименьшее равно -11. **161.** Равносторонний треугольник со стороной $\frac{p}{3}$. **162.** Куб с ребром 10 см. **163.** 2) $x>1$, $x\neq 3$. **164.** 2) $\frac{1}{2}\sin x$; 4) $3x^2\cos 2x-2(x^3+1)\sin 2x$; 6) $\frac{x^4-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+$ $+4x^3\sqrt[3]{x-1}$. **165.** 2) $-\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x-1}$. **166.** 2) $-(1+6x^2)\sin(x+2x^3)$; 4) $-e^x\sin e^x$; 6) $-\sin x\, 2^{\cos x}\ln 2$. **167.** 2) $f'(x)=0$ при $x=0$, $f'(x)>0$ при $x>0$, $f'(x)<0$ при $x<0$; 4) $f'(x)>0$ при $x>-\frac{1}{2}$; 6) $f'(x)=0$ при $x=3$, $f'(x)>0$ при $x>3$, $f'(x)<0$ при $-1<x<3$. **168.** $a>3$. **169.** $a<-12$. **170.** 2) $a\leqslant 0$; 4) $a>12$. **171.** 2) $a\geqslant 0$; 4) $a\leqslant 0$. **172.** 2) $\frac{\pi}{4}$. **173.** 2) $y=-\frac{1}{8}x\ln 2+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y=(1+e^{-1})x$; 6) $y=2\pi(1-x)$. **174.** 2) $y=-\frac{1}{4}$; 4) $y=-7$. **177.** 2) $x=-1$ — точка минимума; 4) $x=-3$ — точка максимума, $x=4{,}5$ — точка минимума. **179.** 2) Наибольшее значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, наименьшее равно $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) 3 и 1. **180.** 2) $\frac{1}{2}$. **181.** 12. **182.** Катеты $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $\frac{2l}{3}$. **183.** 2) $(2;14)$; 4) $(-1;1)$. **184.** 9. **185.** $y=6x+\frac{19}{6}$, $y=6x-54$. **186.** 8 кв. ед. **187.** $2k$ кв. ед. **188.** R^2. **189.** $2\sqrt{\frac{s}{15}}$; $5\sqrt{\frac{s}{15}}$. **190.** $x=-\sqrt{2}$ — точка максимума, $x=\sqrt{2}$ — точка минимума. **192.** $\mathrm{arctg}\, k$.

К главе II

195. 2) $\frac{x^5}{5}+C$; 4) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; 6) $4x^{\frac{1}{4}}+C$. **196.** 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}$; 4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-8$. **197.** 2) x^5+ $+\frac{x^4}{2}+C$; 4) $-\frac{1}{x^4}-3\ln|x|+C$; 6) $3x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{3}{2}}+C$; 8) $2x^3-2x^2+3x+C$. **198.** 2) $2\sin x-$ $-5\cos x+C$; 4) $3e^x+\cos x+C$; 6) $x+3e^x-4\sin x+C$; 8) $8\sqrt{x}+3\ln|x|-$ $-2e^x+C$. **199.** 2) $\frac{1}{4}(x-2)^4+C$; 4) $\frac{9}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}}+C$; 6) $3\ln|x-3|+2\cos(x-1)+C$. **200.** 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x+2\right)^6+C$; 4) $\frac{4}{21}(3x-1)^{\frac{7}{4}}+C$; 6) $2\sqrt{4x+1}+C$; 8) $-\frac{1}{4}(2-3x)^{\frac{4}{3}}+C$. **201.** 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$; 4) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$; 6) $4\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)+C$; 8) $\frac{1}{3}e^{3x-5}+C$.

202. 2) $4e^{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$; 4) $21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}+C$; 6) $\frac{10}{3}\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{3}{2}}-\cos(4x+2)+C$; 8) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2}\ln|2x-5|+C$. **203.** 2) $\frac{3}{10}x^4-\frac{3}{10}x^2+\frac{2}{5}x+C$; 4) $\frac{3}{2}x^2+5\ln x+C$; 6) $x^2-\frac{2}{3}x^3+C$; 8) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+C$. **204.** 2) $\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+C$; 4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+C$. **205.** 2) $2x^2-x$; 4) $2\sqrt{x+3}-3$; 6) $\frac{1}{3}\sin 3x$; 8) $1-\frac{1}{x+1}$. **206.** 2) $12\frac{1}{3}$; 4) $12\frac{2}{3}$; 6) 6; 8) $\frac{1}{2}$. **207.** 2) 4; 4) 12; 6) 18; 8) $1-\ln 2$. **208.** 2) 9; 4) 5; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **209.** 2) 1; 4) 2; 6) 0. **210.** 2) 11; 4) $\frac{8}{3}$; 6) 32; 8) 10. **211.** 2) 25; 4) $8\frac{2}{3}$; 6) 2; 8) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **212.** 2) $-\frac{11}{12}$; 4) 5. **213.** 2) 68; 4) $4\sqrt{3}$; 6) -3. **214.** 2) 8. **215.** 2) e^6-e^2; 4) $\frac{4}{3}\ln 5$. **216.** 2) 0; 4) $-\frac{1}{6}$. **217.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) $4\frac{1}{2}$; 8) $4\frac{1}{2}$. **218.** 2) $6\frac{1}{6}$; 4) $\frac{125}{16}$; 6) 8. **219.** 2) $2-\sqrt{2}$; 4) $\frac{11}{12}$. **220.** 2) $9\frac{1}{3}$; 4) 8; 6) $2+\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$. **221.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **222.** 2) 4,5. **223.** 2) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{6}$; 6) $20\frac{5}{6}$; 8) $\frac{\pi}{2}-1$. **224.** 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) $6\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{3}$. **225.** 2) $21\frac{1}{3}$ м; 4) $44\frac{1}{6}$ м. **226.** $10\frac{2}{3}$ м. **227.** 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin 2x+C$. **228.** 2) $y=\sin x+\cos x+C$; 4) $y=x^3-2e^{2x}+C$. **229.** 2) $y=2\sin x+1$; 4) $y=2x+$ $+x^2-x^3+2$; 6) $y=3-e^{-x}$. **231.** 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. **232.** 2) 12; 4) -2; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **233.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$; 6) $\frac{4}{9}$. **234.** 2) 0; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. **235.** 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $2\sin 12$. **236.** 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. **237.** 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. **238.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3-2$. **239.** 1) 1,75; 2) $3\frac{8}{15}$. **240.** $k=p$.

К главе III

246. 2) $x=-5$; $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$; 4) $x=3$, $y=-5$; 6) $x=7$, $y=4$. **247.** 2) $5-4i$; 4) 0; 6) $-i$; 8) $\sqrt{3}+3i$. **248.** 2) $15+10i$; 4) $2\frac{1}{6}i$; 6) $36+9\sqrt{2}i$. **249.** 2) $-2-2i$; 4) $2+3i$; 6) $12+4i$. **251.** 2) a; 4) $4a^2+9b^2$; 6) $(25a^2+16b^2)i$. **252.** 2) $-7+5i$; 4) $\sqrt{3}+2i$. **255.** 2) 10; 4) $\sqrt{2}$; 6) 4; 8) 2; 10) $\frac{\sqrt{5}}{8}$. **256.** Указание: положить $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ и воспользоваться определением модуля. **258.** 2) $1-6i$; 4) $6i$; 6) 4; 8) $\sqrt{5}+\sqrt{3}i$. **259.** 2) $5-6i$; 4) $-8i$. **260.** 2) $z=6-\frac{5}{2}i$; 4) $z=6+(\sqrt{2}-6)i$. **261.** 2) i; 4) $-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$; 6) $-\frac{23}{13}+\frac{2}{13}i$; 8) $\frac{41}{53}+\frac{11}{53}i$. **262.** 2) $\frac{4}{5}+\frac{22}{5}i$; 4) $0{,}7-0{,}4i$; 6) $\frac{12}{13}$; 8) $\frac{2}{5}$. **263.** 2) $z=-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$; 4) $z=-2-i$. **264.** 2) $2-11i$; 4) 1; 6) -14. **270.** 2) $z=2+$

$+\frac{1}{2}i$. **271.** 2) $2+2\sqrt{3}i$; 4) $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$. **272.** 2) $\varphi=2\pi k$, $z=2(\cos 0+i\sin 0)$, $k\in Z$; 4) $\varphi=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, $z=3(\cos\pi+i\sin\pi)$; 6) $\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\varphi=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin 3\frac{\pi}{2}\right)$; 10) $\varphi=\frac{11\pi}{6}+\ +2\pi k$, $k\in Z$, $z=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 12) $\varphi=\frac{7\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$, $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **273.** 2) $3\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$; 4) $2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$. **274.** 2) $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; 4) $-1+i$. **275.** 2) i; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **276.** 2) $1+i$; 4) 1024. **278.** Указание: левую и правую части привести к виду: $\cos 2n\alpha+i\sin 2n\alpha$. **279.** 2) $z_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$; 4) $z_{1,2}=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}i$; 6) $z_{1,2}=\pm i\sqrt[6]{3}$. **280.** 2) 7; 4) $7i$; 6) $3\sqrt{3}i$. **281.** 2) $z_{1,2}=2\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2\pm 3i$; 6) $z_{1,2}=4\pm 5i$. **282.** 2) $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i$; 4) $z_{1,2}=1\pm\frac{1}{4}i$; 6) $z_{1,2}=3\pm i\sqrt{2}$. **283.** 2) $z^2-4z+13=0$; 4) $z^2+14z+65=0$. **284.** 2) $z^2+z+\frac{13}{36}=0$; 4) $z^2-2\sqrt{3}z+5=0$. **285.** 2) $(z-1+3i)(z-1-3i)$; 4) $(z+1-0{,}2i)(z+1+0{,}2i)$. **286.** 2) $(z+4+i\sqrt{2})\times\times(z+4-i\sqrt{2})$; 4) $-(z-5+i)(z-5-i)$. **287.** 2) $z_{1,2}=\pm(3+i)$; 4) $z_{1,2}=\pm(3+4i)$; 6) $z_{1,2}=\pm(5-i)$. **288.** 2) $z_{1,2}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; 4) $z_{1,2}=\pm(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)$; 6) $z_{1,2}=\pm(\sqrt{3}-i)$. **289.** 2) $z_{1,2}=\pm\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+i\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $z_{1,2}=\pm(1+3i)$. **290.** 2) $z_1=-2$, $z_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$; 4) $z_1=-1$, $z_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 6) $z_{1,2}=\pm1$, $z_{3,4}=\pm i$. **291.** 2) $x=-2$; 4) $x=0$. **292.** 2) $x=-1$; 4) $x=-0{,}2$. **293.** 2) $12+4i$; 4) 54. **294.** 2) $\sqrt{74}$; 4) 5; 6) $\sqrt{7}$. **295.** 2) -2; 4) $\frac{4}{5}$; 6) $1\frac{5}{17}$. **296.** 2) $z=5-3i$; 4) $z=5+(4+\sqrt{2})i$. **298.** 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$. **299.** 2) $2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)$. **300.** 2) $(5+i)(5-i)$; 4) $(2+2i)(2-2i)$. **301.** 2) $x=1$, $y=6$. **302.** 2) $\frac{15}{4}-2i$. **304.** Равны. **305.** 2) $z^2-2\sqrt{3}z+5=0$. **306.** 4) $z_{1,2}=\pm2(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}i)$; 6) $z_{1,2}=\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$; $z_{3,4}=\pm\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i\right)$. **308.** 2) $6(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$. **309.** 2) $1+\sqrt{3}i$.

К главе IV

310. 1) 6; 2) 24. **311.** 1) 27; 2) 64. **312.** 16. **313.** 6. **314.** 240. **315.** 720. **316.** 50 000. **317.** 90. **318.** 45. **319.** 30 000. **320.** 4 536 000. **321.** 1) 120; 2) 40 320; 3) 720; 4) 362 880. **322.** 24. **323.** 5040. **324.** 1) 24; 2) 6; 3) 12. **325.** 1) 8!; 2) 16!;

3) 14!; 4) $(k+1)!$; 5) $k!$; 6) $(k+1)!$; 7) $k!$; 8) $(k-3)!$. **326.** 1) 19; 2) 462; 3) $\frac{3}{7}$; 4) 15; 5) n^2+3n+2; 6) $\frac{1}{n^2+5n+6}$; 7) $\frac{1}{n+2}$; 8) $\frac{1}{k+6}$. **327.** 1) 3; 2) 11. **328.** 1) 725 760; 2) 241 920. **329.** 1) 3; 2) 6; 3) 42; 4) 5040; 5) 336; 6) 1680; 7) 90; 8) 5040. **330.** 60 480. **331.** 360. **332.** 870. **333.** 720. **334.** 1) 100; 2) 3. **335.** 1) 12; 2) 9; 10. **337.** 1) 15; 2) 56; 3) 28; 4) 56; 5) 9; 6) 9; 7) 1; 8) 1; 9) 120; 10) 120; 11) 4950; 12) 2415. **338.** 84. **339.** 286. **340.** 190. **341.** 105. **342.** 220. **343.** C_n^p. **344.** 60. **345.** 1) 4; 8; 2) 8. **346.** 1) 560; 2) 110; 3) 1140; 4) 4950. **347.** 150. **348.** $C_{13}^3 \cdot C_{13}^4 \cdot C_{13}^5 \cdot C_{13}^2$. **349.** 1) $1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+$ $+21x^5+7x^6+x^7$; 2) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$; 3) $16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$; 4) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$; 5) $32a^5-40a^4+20a^3-5a^2+\frac{5}{8}a-\frac{1}{32}$; 6) $\frac{a^6}{64}+\frac{3}{8}a^5+\frac{15}{4}a^4+20a^3+60a^2+96a+64$. **350.** 1) 32; 2) 62. **351.** $C_{10}^3 \cdot x^2$. **352.** $C_{16}^6 \cdot x^3$. **353.** 1) 330; 2) 1090. **354.** 1) $(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{n}{n+1}$. **355.** 1) 47; 2) 10. **356.** 1) 2; 2) 7; 3) 4; 4) 11; 5) 7; 6) 4; 9. **357.** 40 320. **358.** 28. **359.** 56. **360.** 59 280. **361.** 15 800. **362.** 5; 14; $\frac{n(n-3)}{2}$. **363.** 1) 364; 2) 455. **364.** 1) 16; 2) 64. **365.** 1) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$; 2) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$; 3) $16+32a+48a^2+8a^3+a^4$; 4) $a^4+12a^3+54a^2+108a+81$. **366.** 350. **367.** 2^{32}. **368.** 3 800 000. **369.** 252. **370.** 306. **371.** $n(2n-1)$. **372.** $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}$. **373.** 1) 1001; 2) 462; 3) 35; 4) 56; 5) 64; 6) 262. **374.** 1) $32a^5-80a^4+80a^3-40a^2+10a-1$; 2) $\frac{1}{64}+\frac{3}{8}b+\frac{15}{4}b^2+20b^3+60b^4+96b^5+64b^6$; 3) $81x^4+36x^3+6x^2+\frac{4}{9}x+\frac{1}{81}$; 4) $\frac{1}{243}y^5-\frac{5}{27}y^4+\frac{10}{3}y^3-30y^2+135y-243$. **375.** $C_{12}^6 \cdot x^{-1}$.

К главе V

376. 1) Невозможное; 2) случайное; 3) достоверное. **377.** $\frac{1}{3}$. **378.** $\frac{2}{61}$. **379.** $\frac{1}{10}$. **380.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$; 7) 1; 8) 0. **381.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{72}$; 3) $\frac{1}{36}$. **382.** 1) $\frac{1}{35}$; 2) $\frac{12}{35}$; 3) $\frac{22}{35}$. **383.** 1) Являются; 2) не являются; 3) не являются; 4) являются. **384.** $\frac{2}{3}$. **385.** $\frac{2}{9}$. **386.** 1) «Сегодня первый урок — не физика»; 2) «экзамен не сдан на отлично»; 3) «выпало больше четырех очков» или «выпало 5 или 6 очков»; 4) «ни одна пуля не попала в цель». **387.** 0,99999999. **388.** $\frac{3}{4}$. **389.** $\frac{5}{6}$. **390.** $\frac{181}{385}$. **391.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$;

4) $\frac{1}{3}$. 392. 1) $\frac{8}{9}$; 2) $\frac{8}{45}$. 393. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{18}$. 394. 1) $\frac{17}{70}$; 2) $\frac{9}{35}$; 3) $\frac{18}{35}$. 395. 1) $\frac{9}{38}$; 2) $\frac{5}{19}$; 3) $\frac{10}{19}$. 396. 1) $\frac{1}{26}$; 2) $\frac{15}{26}$; 3) $\frac{5}{26}$; 4) $\frac{3}{4}$. 397. 1) $\frac{25}{29}$; 2) $\frac{4}{29}$. 398. 1) $\frac{161}{267}$; 2) $\frac{70}{89}$. 399. 1) Являются; 2) являются; 3) являются; 4) не являются. 400. $\frac{1}{36}$. 401. $\frac{1}{4}$. 402. 0,36. 403. 0,42. 404. 1) 0,15; 2) 0,1. 405. $\frac{1}{9}$. 406. $\frac{1}{6}$. 407. 0,91. 408. 0,44. 409. 68,6%. 410. $\frac{1}{3}$. 411. $\frac{1}{2}$. 412. $\frac{5}{36}$. 413. $\frac{5}{6}$. 414. $\frac{1}{12}$. 415. 0,02. 416. 1) $\frac{1}{105}$; 2) $\frac{4}{315}$; 3) $\frac{2}{35}$; 4) $\frac{4}{35}$. 417. $\frac{11}{36}$. 418. $\frac{1}{6}$. 419. $\frac{C_4^2 \cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} = \frac{325}{833}$. 420. $\frac{2C_5^5 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}$.

К главе VI

430. $m = 7$. 432. 4. 438. 1), 2) Таких чисел нет. 440. 1) Да; 2) нет. 441. 1) -2; -1; 0; 1; 2; 2) -3; 3. 443. 1) $x = 1$, $y = 0$; 2) $x = 2$, $y = 0$. 446. 1) 4; 2) 7. 447. 1) 1; 2) 1. 451. 1), 2) Нет решений. 452. 1) $x = -6 + 15t$, $y = 3 - 7t$, $t \in Z$; 2) $x = 15 + 16t$, $y = -10 - 11t$, $t \in Z$. 453. 1) $x = -2 + 21t$, $y = 1 - 10t$, $t \in Z$; 2) $x = 3 + 4t$, $y = -15 - 21t$, $t \in Z$. 456. 1) $(3; -1)$; 2) $(-1; -3)$. 457. 1) $(-6; -7)$, $(-4; 3)$, $(4; -5)$; 2) $(-5; -8)$, $(-3; 2)$, $(5; -6)$. 458. 1) $(2; 0)$, $(2; 2)$; 2) $(-3; 1)$, $(-5; 1)$. 464. 1) 1; 2) 10. 466. 1) $x = 8 + 3t$, $y = -12 - 5t$; 2) $x = 6 + 7t$, $y = -4 - 5t$, $t \in Z$. 467. 1) $(6; -5)$, $(4; 5)$, $(-4; -3)$; 2) $(-7; 5)$, $(-5; 5)$, $(3; 3)$.

К главе VII

469. -1. 470. -192. 471. 22. 472. 6. 473. $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$. 474. 0. 475. 1) Частное $x^2 - x - 6$, остаток 0; 2) частное $x^2 + x - 6$, остаток 0. 476. 1) $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $R = -7$; 2) $Q(x) = 2x^2 + 4$, $R = 8$. 477. 1) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $R(x) = x - 3$; 2) $Q(x) = 4x^2 - 6$, $R(x) = 2x + 3$. 478. $R(x) = \frac{9}{2}x - 1$. 479. $R(x) = x + 5$. 480. $R(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$. 481. 1) $Q(x) = -9x^6 + 9x^5 - 9x^4 + 22x^3 - 22x^2 + 22x - 8$, $R = 4$; 2) $Q(x) = x^5 - 2x^4 + 13x^3 - 26x^2 + 68x - 136$, $R = 262$. 482. 24. 483. -8. 484. Делится. 485. Делится. 486. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. 487. $x_1 = -2$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$. 488. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$. 489. $a = 11$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. 490. $x_3 = 3$. 491. $P(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. 492. $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$. 493. $P(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 2)$. 494. $P(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 2)(x^2 + x\sqrt{2} + 2)$. 495. $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x^2 + 4)$. 496. $4p^3 + 27q^2 = 0$. 497. 1) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$; 2) $(1; 1)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$. 498. 1) $(x + y)(x + 1)(y + 1)$; 2) $(x + y + 1)(xy + x + y)$. 499. 1) $(x + y)(y + z)(z + x)$;

2) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$. **500.** 1) (1; 2; −2), (2; 1; −2), (−2; 1; 2), (1; −2; 2), (2; −2; 1), (−2; 2; 1). **501.** 1) Да; 2) нет. **502.** 1) $R=5$; 2) $R=6$. **503.** 1) $Q(x)=$ $=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}$; $R(x)=\frac{8}{9}$; 2) $Q(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$; $R(x)=-\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}$. **504.** $x+9$. **505.** $-2x+4$. **510.** $a=1$, $b=6$, $x_3=3$. **511.** $a=3$, $b=-4$. **512.** $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=1+\sqrt{2}$, $x_4=1-\sqrt{2}$. **513.** $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=-2$.

К упражнениям для повторения

521. 0,08. **522.** 30. **523.** $3\frac{1}{3}$%. **524.** 400 %. **525.** 45. **526.** 13,5. **527.** 62 %. **528.** 30% цинка, 10% олова, 60% меди. **529.** 365 р. **530.** На 21%. **531.** 8. **532.** 600. **533.** 655,64 р. **534.** 510,02 р. **535.** 2) 4; 4) 1,02. **536.** 2) $\frac{22}{85}$; 4) 2. **537.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) 20,8. **538.** 2) 1083. **539.** 2) 64; 4) 25; 6) 8. **540.** 2) −10; 4) $\frac{3}{7}$; 6) 160. **541.** 2) Второе; 4) первое. **542.** 2) $\sqrt{3}$; 4) 0; 6) $2b$. **543.** 2) $|b|\cdot(2b^2+1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. **544.** 2) $2\sqrt{5}$; 4) $\frac{b\sqrt{a}}{2a}$; 6) $3(\sqrt{6}-\sqrt{5})$; 8) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$. **545.** 2) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. **546.** 2) $\frac{25}{9}$; 4) $\frac{15}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. **547.** 2) 2,(1); 4) 5,(18). **548.** 2) Да. **551.** 2) Да; 4) не имеют. **553.** $\approx 2\sqrt{3}$ см. **554.** $\approx 59^\circ$. **555.** ≈ 87 м. **556.** ≈ 178 м. **557.** 2) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{5}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$. **558.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{3}{4}$. **559.** 2) $-\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{4}{9}$. **561.** 2) 52; 4) $4-4i$. **562.** 2) $-\frac{42}{29}$; 4) $-\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i$. **563.** 2) $7\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; 8) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **564.** 2) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$; 6) $2\cos\frac{3\pi}{20}\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$. **565.** 2) $16\sqrt{3}+16i$; 4) 128 **566.** 2) $|z|=4$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. **567.** 2) 1. **568.** 2) 1. **569.** 2) 2. **573.** 2) $\frac{3(b+1)}{b+3}$; 4) $\frac{b-4}{2b}$. **574.** 2) $a+b$. **575.** 2) $\frac{a+1}{b-1}$; 4) $\frac{b^2}{a^2+b^2}$. **576.** 2) $\frac{a^2-4b^2}{ab}$; 4) 0. **577.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **578.** 2) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **579.** 2) $16a^2$. **580.** 2) $-6\sqrt{b}$. **581.** 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. **582.** 2) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$;

4) $\dfrac{2\sqrt{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$. **584.** 2) $\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha$. **585.** 2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $-\sin 2\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **591.** 2) $x=3$; 4) $x=8$. **592.** При $a=-6$. **593.** При $b=3$. **594.** 2) $x=3$. **595.** 2) $x=-1{,}25$; 4) $x=-1$; 6) $x=5$. **596.** 2) $x=\dfrac{1}{a-b}$ при $a\neq b$. **597.** 2) $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{2}{3}$; 4) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{3}$; 6) $x_1=-5$, $x_2=5$. **598.** 2) $x_1=2$, $x_2=10$; 4) $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{3}{2}$. **599.** 2) $x=4$; 4) $x=3$. **600.** 2) Не имеет корней. **601.** 2) $x=2$. **602.** 2) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. **603.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $x=1$. **604.** 1) $x=3$; 2) $x_{1,2}=\pm2$, $x_3=3$; 3) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. **605.** $x_1=1$, $x_2=2$; $x_3=3$. **606.** 2) $x_{1,2}=\pm2$, $x_3=-1$, $x_4=3$; 4) $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{4}$. **607.** 2) $x_{1,2}=-\dfrac{a}{2}\pm b$; 4) $x_1=a$, $x_2=-\dfrac{5}{2}a$. **608.** 2) $\dfrac{387}{64}$; 4) $-0{,}387$. **609.** 2) $k=-2$. **610.** $a_1=2$, $a_2=1$. **611.** $b_1=-1$, $b_2=\dfrac{4}{3}$. **612.** $a>0$, $b^2=4ac$. **614.** 2) $x=6$; 4) $x=\dfrac{11}{3}$. **615.** 2) $x_1=3$, $x_2=\dfrac{5}{3}$; 4) $x=1$. **616.** $x=3$. **617.** $x=5$. **618.** 2) Не имеет корней; 4) $x_1=2$, $x_2=-1$. **619.** 2) $x=0$; 4) $x=8$. **620.** 2) $x_{1,2}=\pm5$; 4) $x=\dfrac{16}{25}$; 6) $x_1=0{,}1$, $x_2=2$, $x_3=\dfrac{16}{9}$. **621.** 2) $x_1=3$, $x_2=2$; 4) $x=3$. **622.** 2) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x=3$. **623.** 2) $x=5$. **624.** 2) $x=25\sqrt{3}$; 4) $x=\sqrt{3}$. **525.** 2) $x_1=9$, $x_2=1$. **626.** 2) $x=9$; 4) $x=18$. **627.** 2) $x_1=0{,}01$, $x_2=100$; 4) $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. **628.** Нет. **629.** 2) $z_{1,2}=3\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2\pm\dfrac{i}{2}$; 6) $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$; 8) $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{2}}{3}$. **630.** 2) $z_{1,2}=\pm3$, $z_{3,4}=\pm i$; 4) $z_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $z_{3,4}=\pm i\sqrt{5}$. **631.** 2) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; 6) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **632.** 2) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{4}n$, $n\in Z$; 6) $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{3}n$, $n\in Z$. **633.** 2) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\pi n$, $n\in Z$; 6) корней нет. **634.** 2) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}n$, $x=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$. **635.** 2) $x=\dfrac{\pi}{8}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{5}n$, $n\in Z$. **636.** 2) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=-\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **637.** 2) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\dfrac{\pi}{2}n$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **638.** 2) $x=\pi+2\pi n$,

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+$ $+(-1)^n \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in Z$. **639.** 2) $x=\frac{\pi}{2}n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$. **640.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n$, $n\in Z$.

641. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}n$, $n\in Z$. **642.** 2) Корней нет; 4) $x=\pi n$, $n\in Z$. **643.** 2) $x>-2$; 4) $x>1$. **644.** 2) $x>56$; 4) $x<0{,}1$; 6) $x\geqslant 5$. **645.** 2) При $x<0{,}5$ и $x>\frac{2}{3}$; 4) при $x<\frac{3}{11}$; 6) при $-\frac{10}{3}<x<40$; 8) при $-2<x<8$. **646.** 2) При $x<\frac{2}{3}$ и $x>\frac{3}{2}$; 4) при $x<-\frac{2}{9}$ и $x>\frac{5}{2}$; 6) при $x<\frac{18}{7}$. **647.** 2) $-16<x<3$; 4) $x<4$, $x>6$; 6) $x<-3$, $x\geqslant-2{,}5$. **648.** 2) $x\leqslant 5$, $x\geqslant 9$; 4) $-3<x<7$; 6) x — любое действительное число; 8) нет решений; 10) $-1{,}4\leqslant x\leqslant 0$. **649.** 2) $x>-4$. **650.** 2) $-7<x<2$, $x\geqslant 5$; 4) $x<-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}<x<1$; 6) $x<-4$, $-1<x<2$, $x>3$. **651.** При $-5\leqslant x\leqslant -3$. **652.** $m=2$. **653.** При $m=8$ и $m=9$. **654.** При $x=6$. **655.** При $x=-1$. **656.** 2) $x<2{,}8$, $x>4$; 4) $1{,}25<x<1{,}75$; 6) $x<2$. **657.** 2) $x<-2$; $1<x<2$, $x>5$; 4) $\frac{1-\sqrt{73}}{6}<x<-\frac{2}{3}$, $1<x<\frac{1+\sqrt{73}}{6}$. **658.** 2) $0\leqslant x\leqslant 1$; 4) $-3\leqslant x<1$. **659.** 2) $-\sqrt{11}<x\leqslant-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{11}$; 4) $x>-0{,}5$. **660.** 2) $-2\leqslant x\leqslant 0{,}25$, $x>2$. **661.** 2) $-1<x<5$; 4) $-1{,}5<x\leqslant-0{,}9$. **662.** 2) $x<1$. **663.** 2) Нет решений. **664.** 2) $x<1$, $x>3$. **665.** 2) $-\sqrt{5}\leqslant x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{5}$; 4) $x>2$. **666.** 2) $1<x<2$; 4) $x>3$. **667.** 2) $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. **668.** 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **669.** 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. **670.** 2) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 4) $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k<x<\arccos\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **674.** 2) $(2;\ 1)$; 4) $(5;\ -3)$. **675.** 2) $(-1200;\ 500)$; 4) $(7;\ 1)$. **676.** 2) $(-8;\ -2)$, $(8;\ 2)$; 4) $(3;\ 4)$, $(4;\ 3)$; 6) $(8;\ 4)$, $(-8;\ -4)$. **577.** 2) $(7;\ 6)$; 4) $(2;\ 3)$, $\left(-9; 28\frac{2}{3}\right)$. **678.** 2) $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$; 4) $(3;\ 5)$, $(3;\ -5)$, $(4; 2\sqrt{2})$, $(4; -2\sqrt{2})$. **679.** 2) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(0{,}5;\ 1{,}5)$, $(-0{,}5;\ -1{,}5)$; 4) $(0;\ 2)$, $(0;\ -2)$, $(-2;\ 0)$. **680.** 2) $(0{,}5; \sqrt{2})$, $(0{,}5; -\sqrt{2})$; 4) $(6;\ 6)$, $\left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$. **681.** 2) $(4;\ 2)$; 4) $(3;\ 1)$. **682.** 2) $(2;\ 3)$. **683.** 2) $(100;\ 0{,}1)$; 4) $(10;\ 100)$, $(100;\ 10)$. **684.** 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **685.** 2) $(2+i;\ 2-i)$, $(2-i;\ 2+i)$; 4) $(1+2i;\ 1+3i)$, $(1-2i;\ 1-3i)$; 6) $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$; $(i;\ -3i)$; $(-i,\ 3i)$. **686.** 2) $x>5$. **687.** 2) $1<x<2$. **688.** 2 и 12.

689. 1) $\left(-\frac{1}{6}+n;\ \frac{1}{6}+n\right)$, $n\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

690. 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n\in Z, k\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(n+2k);\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(n+k);\ -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k-n)\right)$, $n\in Z, k\in Z$. **691.** 1 мин. **692.** 126 км. **693.** 1080 км. **694.** 16 дней. **695.** 12 ч. **696.** 91 га. **697.** 8 и 12. **698.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$. **699.** 432 детали. **700.** 18 км/ч. **701.** 25 и 20 билетов или 20 и 15 билетов. **702.** 3 км/ч. **703.** 21 ц; 20 ц. **704.** 1400 шагов. **705.** 10 чел. **706.** 400 м. **707.** Через 6 с. **708.** На 20 км/ч. **709.** 3, −6, 12, −24. **710.** 27. **711.** 1; 3; 9; 15 или 16; 8; 4; 0. **712.** 2 или $12\frac{2}{5}$. **713.** В 3 раза. **714.** 16 см^2. **715.** $b=-2$. **716.** $k=-1$. **717.** 2) $k=-1$, $b=3$; 4) $k=0$, $b=-2$. **718.** $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$. **719.** 2) Нет; 4) да. **720.** 2) $AB=\frac{10}{3}$. **721.** 2) При $x<\frac{1}{3}$. **722.** 2) При $x>\frac{1}{2}$. **723.** При $x>1$. **724.** При $x<-\sqrt{3}$. **727.** 2) Да. **728.** 2) (−1; 3), (5; 3). **729.** 4) $x<-2$, $x>2$. **730.** 4) При всех значениях x, кроме $x=0$. **731.** 2) Да; 4) да. **732.** 2,25. **733.** 2) (0; 2) (2; 0), (0,5; 0). **734.** $y=2x^2-5x-3$. **735.** Полуокружность с центром в начале координат радиуса 5, лежащая выше оси Ox. Возрастает на отрезке [−5; 0], убывает на отрезке [0; 5]. **736.** Гипербола, пересекающая ось Oy в точке (0; −2,5). **737.** 2) $y=\sqrt[4]{x}$; 4) $y=2-x$, $x\geqslant 0$. **739.** 2) $x<-5$, $x>3$. **740.** 2) $x\leqslant -7$, $x>6$. **741.** 2) $x\leqslant 2$. **742.** 2) $x\leqslant 1$. **743.** При $x<1$. **744.** При $x>27$. **745.** $y=x+1$. **746.** $y=3x-3$. **747.** Наибольшее значение 132, наименьшее значение равно −57. **748.** Наибольшее значение 9, наименьшее значение равно 4. **749.** (1; 1). **750.** $\frac{49}{27}$. **751.** 2. **752.** $\frac{\pi p^3}{216}$. **753.** Радиус основания равен $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, высота $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **754.** Диаметр основания равен высоте. **755.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **756.** $\frac{4R}{3}$. **757.** Радиус основания $\frac{2R}{3}$, высота равна $\frac{H}{3}$. **758.** 1) $x=-3$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума. **759.** (1; 0), (−1; 4). **760.** $y=7x-43$. **761.** 2) Функция четная, $x_{1,2}=\pm 1$ — точка минимума, $x=0$ — точка максимума. **762.** 2) $\frac{11}{3}$; 4) 4,5; 6) 18. **763.** 2) 4,5; 4) $\frac{5}{12}$. **764.** 2) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-2$; 4) $\frac{8}{3\ln 3}$. **765.** 210. **766.** 36. **767.** 3^m. **768.** 4^{12}. **769.** 435. **770.** $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$. **771.** 0,85; 850. **772.** 480. **773.** $\frac{29}{38}$. **774.** $\frac{5}{6}$. **775.** 0,18. **776.** 0,97. **777.** 0,96. **778.** 0,028. **779.** 2) $x\geqslant 2$; 4) $F(x)=\frac{x^4-7}{12}$, $F(2)=\frac{3}{4}$. **780.** 2) $-4<x<0$; 4) $F(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$, $F(\sqrt[3]{9})=3\frac{1}{3}$. **781.** 2) $x>3$; 4) 31,5.

782. 2) $\frac{1}{2}<x<2$; 4) $16\frac{2}{3}$. **783.** 2) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; 4) -4. **784.** 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$; 4) 12. **785.** 2) $x<-5$, $x>4$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **786.** 2) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **787.** 2) 3; 6; 12; 24 или 24; 12; 6; 3; 4) $x=\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **788.** 2) 7 или 13; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **789.** 2) $x=1$; 4) $-2\leqslant x<2$. **790.** 2) $x=3$; 4) $x\geqslant 1{,}25$. **791.** 2) $x=1$, $y=2$; 4) $\sqrt{2}$. Указание: воспользоваться равенством $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$. **792.** 2) 1; 4) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{ab}$. **793.** 2) 3; 15; 75; ...; -45; 15; 75; ... или 75; 15; 3; ...; 27; 15; 3; ...; 4) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **794.** 1) $\left[1\frac{2}{3};4\frac{2}{3}\right]$; 2) $x\geqslant-1$; 3) $x=\frac{\pi}{12}(12n\pm5)$, $n\in Z$; 4) $M(1;\,0)$; 5) $8\frac{2}{3}$; 6) если $0{,}5<a\leqslant 1$, то нет решений; если $a\leqslant-1$, $a=0{,}5$, $a>1$, то одно решение; если $-1<a<0{,}5$, то два решения. **795.** 1) $0{,}6<x<1{,}6$; 2) убывает при $x\geqslant-1$; 3) $x=\frac{\pi}{12}(3n+(-1)^{n+1})$, $n\in Z$; 4) $M(1;\,0)$; 5) $8\frac{2}{3}$; 6) если $-1\leqslant b<-0{,}5$, то нет решений; если $b<-1$, $b=-0{,}5$, $b\geqslant 1$, то одно решение; если $-0{,}5<b<1$, то два решения. **796.** 1) $x=\frac{1}{16}$; 2) $-2\leqslant x<-1$; 3) область определения — все действительные числа; при $x\leqslant-1$ — возрастает; при $-1\leqslant x\leqslant 1$ — убывает; $x\geqslant 1$ — возрастает; экстремумы -2 и 2, график на рисунке 86; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; 5) $-e^5$; 6) $7\frac{1}{3}$.
797. 1) $\frac{1}{49}$; 2) $1<x\leqslant 2$; 3) область определения — все действительные числа; при $x\leqslant 0$ — возрастает, при $0\leqslant x\leqslant 1$ — убывает, при $x\geqslant 1$ — возрастает;

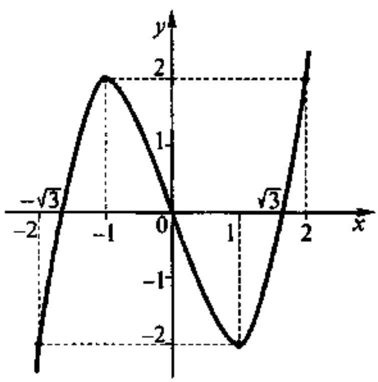

Рис. 86

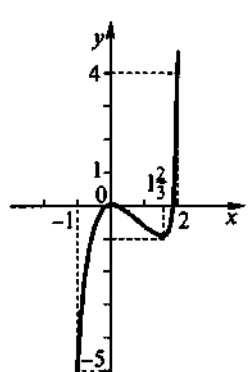

Рис. 87

экстремумы -1 и 0, график на рисунке 87; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; 5) $\frac{4}{e^7}$; 6) 25,5. **798.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z,\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $-3<x<-\frac{1}{9}$; 3) (4; 1); 4) 108; 5) 6; -4; 6) $\log_2 3<\sqrt[3]{7}$. **799.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $x<-4$; $-\frac{1}{8}<x<0$; 3) $\left(\frac{1}{9}; \frac{16}{9}\right)$; 4) 506,25; 5) 7; -3; 6) $\log_3 4>\sqrt[4]{2}$. **800.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z,\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n, n\in Z$; 2) $-\frac{4}{5\ln 10}$; 3) 16π; 4) $y\leqslant 10\frac{2}{3}$; 5) $x\leqslant -1,\ x\geqslant \log_2\frac{\sqrt{85}-6}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$. **801.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{2}{5\ln 10}$; 3) 20π; 4) $y\leqslant-\frac{19}{12}$; 5) $x\leqslant -1$, $x\geqslant\log_3(\sqrt{20}-3)$, 1; 6) (1,15; -2,1).

К задачам для внеклассной работы

802. 2) $x=2$; 4) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=10$. **803.** 2) $x=4$; 4) $x=1$. **804.** 2) $x=4$. **805.** 2) $x=3$. **806.** 2) $x=-17$; 4) $x=-5$. **807.** 2) $x=2-\sqrt{2}$. **808.** 2) $x_1=10$, $x_2=0{,}1$. **809.** 2) $x=-1$. **810.** 2) $x=5$. **811.** 2) $x=16$. **812.** 2) $m=-5$. **813.** 2) $x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi n,\ n\in Z$. **814.** 2) $x=\pi n,\ x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **815.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n,\ n\in Z$. **816.** 2) $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **817.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **818.** 2) $x=-\frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n,\ n\in Z$. **819.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$. **820.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **821.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$. **822.** 2) $x=\pi n, n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. **823.** 2) Если $-1\leqslant a<-\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$, то $x=(-1)^n\cdot\arcsin a+\pi n,\ n\in Z$; если $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, то $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\arcsin 2a+\pi n,\ n\in Z$. **824.** 2) $k=0$ или $k=6$. **825.** 2) $p_1=1,\ p_2=-1$. **826.** 2) При $a<-1$ и при $a>1$ один корень $x=-3$; при $a=-1$ корнями являются все числа луча $x\leqslant -3$; при $a=1$ корнями являются все числа отрезка $-3\leqslant x\leqslant 2$; при $-1<a<1$ два корня: $x_1=-3,\ x_2=\frac{7-3a}{1+a}$; 4) при $a<-2$ и при

$a > 2$ один корень $x = -3$; при $a = -2$ корнями являются все числа луча $x \geqslant -3$; при $a = 2$ корнями являются все числа отрезка $-4 \leqslant x \leqslant -3$; при $-2 < a < 2$ два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{3a+10}{a+2}$. **827.** 4; 4. **829.** $x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$. **830.** $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **831.** $\frac{3}{5} < a \leqslant \frac{3+3\sqrt{6}}{10}$. **832.** $\frac{16}{17} \leqslant a < 2$. **833.** 2) $(-1; 1)$; 4) $(5; 0{,}5)$; 6) $(0{,}5; -3)$, $(2; -4)$, $\left(\frac{3}{2}; -5\right)$; 8) $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(-3; 1)$. **834.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + 2\pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{4} - \pi n + 2\pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$; 6) $x_1 = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $y_1 = \arccos\frac{1}{8} + 2\pi k$, $x_2 = -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $y_2 = -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$. **835.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} + \pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$; $y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} - \pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$. **836.** $a < -18$, $a \geqslant 18$. **837.** $\left[-\frac{7}{3}; 6\right)$.
838. 2) $-1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{\sqrt{15}}{4} < x \leqslant 1$; 4) $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. **839.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $-\frac{4}{3} < x < 2$. **840.** 2) $x < -3$, $x > 1$; 4) $x > 1$; 6) $x \in R$. **841.** 2) $3 < x < 4$, $x > 6$; 4) $-\log_3 2 < x < \log_3 2 - 1$, $x > \log_3 2$; 6) $x < \frac{\sqrt{6}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{5} < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$; 8) $x < -4$, $x > 3{,}5$. **842.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.
843. 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 6) $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 8) $\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.
844. 2) $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 6) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **845.** 1) $a \geqslant \frac{10}{3}$; 2) $a \leqslant \frac{1}{3}$. **846.** $a < \sqrt{2}$.
847. Если $a < \frac{3}{4}$ — нет решений; если $a = \frac{3}{4}$, то $x = \frac{15}{4}$; если $a > \frac{3}{4}$, то $a + 3 < x < 9a - 3$. **848.** -32; 40; 130. **849.** 2) Меньше нуля. **854.** 2) $-\frac{\pi}{5}$; 4) $-\frac{\pi}{14}$; 6) $7 - 2\pi$. **855.** 2) $\frac{4\pi}{5}$; 4) $\frac{6\pi}{7}$; 6) $\frac{3\pi}{8}$; 8) $7 - 2\pi$. **856.** 2) $-\frac{3\pi}{7}$; 4) 0,3; 6) $-\frac{3\pi}{7}$; 8) $6 - 2\pi$. **857.** 2) 1 и 0,5. **858.** 2) $-4 \leqslant x \leqslant 2$. **860.** 2) На луче $x \leqslant 2{,}5$ обратная функция $y = \frac{5-\sqrt{1+4x}}{2}$, на луче $x \geqslant 2{,}5$ обратная функция $y = \frac{5+\sqrt{1+4x}}{2}$; 4) на луче $x \leqslant 1$ обратная функция $y = 1 - \sqrt{x}$, на луче $x \geqslant 1$ обратная функция $y = 1 + \sqrt{x}$. **862.** 2) См. рис. 88. **867.** 2) См. рис. 89. **868.** 2) См. рис. 90. **869.** 2) См. рис. 91. **870.** 2) Графиком является множество точек с координатами $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0\right)$, $k \in Z$. **871.** 2) См. рис. 92; 4) см. рис. 93. **878.** 2) 5; 4) 8;

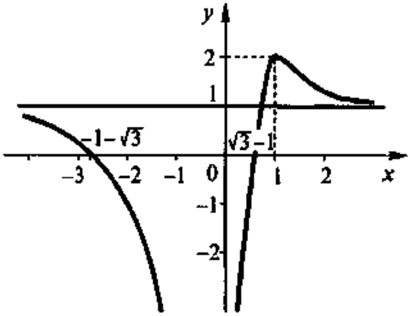

Рис. 88

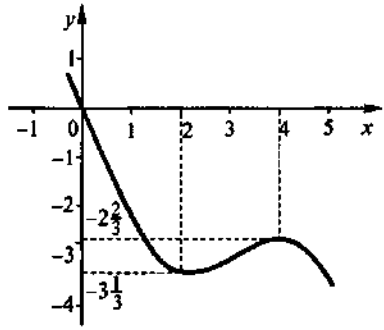

Рис. 89

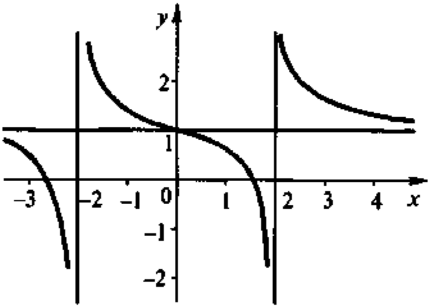

Рис. 90

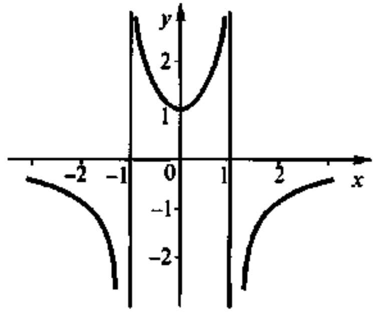

Рис. 91

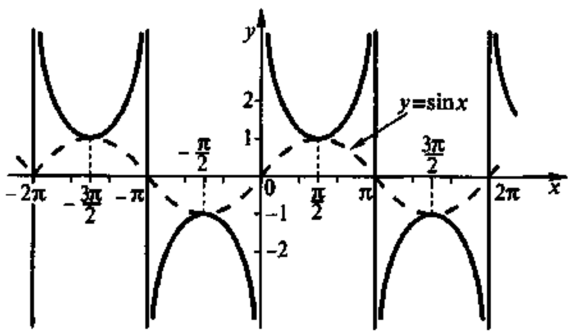

Рис. 92

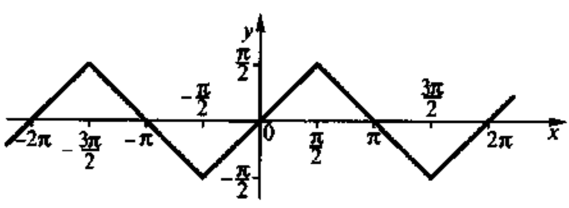

Рис. 93

6) 3. 880. 2) $z=-2+\frac{1}{2}i$. 881. 2) $z_{1,2}=2\pm i$, $z_{3,4}=-2\pm i$. 883. 2) z — любое действительное неположительное число; 4) $z=1{,}5-2i$. 884. $z=0$. 886. 2) $\ln|x+2|+C$; 4) $\frac{2}{15}(3x^2-4x-7)\sqrt{x+1}+C$; 6) $\frac{2}{15}(3x^2-8x-28)\sqrt{x+2}+C$. 887. 2) $-\frac{1}{12}\cos 6x+C$; 4) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. 888. 2) 0,5; 4) $\frac{3\pi}{4}$. 889. 2) $1+3\ln 2$; 4) $3+\ln 4$; 6) $\frac{4}{3}$. 890. $(-1;\ 3)$, $y=x+4$. 891. $a=1$, $S=4$. 892. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$. 893. $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$. 894. 2) $\frac{64}{3}$. 895. 2) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{1}{12}$. 896. $a=-\frac{3}{2}$, $y_{\min}=-11$. 897. $a=-3$, $y_{\max}=9$. 898. $a=6$, $b=-11$, $c=6$. 899. 2; $15\ln 2-9$. 900. 2; $\frac{7\ln 6}{2}-5$. 901. 2) $y=2e^{-x}$. 902. 2) 0,96 Дж. 903. $\frac{1}{2}\pi R^2 gh^2\rho$. 904. -2. 905. $b_1=6$, $q=-0{,}5$. 906. 2; 4; 6; 9 или $\frac{35}{4};\frac{25}{4};\frac{15}{4};\frac{9}{4}$. 907. 64 или $\frac{64}{3}$. 908. 21. 909. 10; 4; -2; 1 или $-\frac{5}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4};\frac{49}{4}$. 910. 3 м/мин. 911. 10 м. 912. $\frac{50}{3}$ мин и 50 мин. 913. $2{,}5v$ литров. 914. 20 км. 915. 0,5 ч. 916. 13,5 и 11,5 км.

Проверь себя!

Глава I

1. 85. 2. $-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}-e^x$; $12(3x-5)^3$; $6\cos 2x\cos x-3\sin 2x\sin x$; $\frac{x^4+15x^2}{(x^2+5)^2}$. 3. $\alpha=-\frac{\pi}{4}$. 4. Рис. 94; 95. 5. Наибольшее $y(5)=5\frac{4}{5}$, наименьшее $y(2)=4{,}6$. По 2 м.

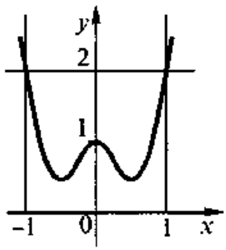

Рис. 94

Глава II

2. $F(x)=x^3+x^2-3x-1$. 3. $11\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; 1; -1. 4. $20\frac{5}{6}$ кв. ед.

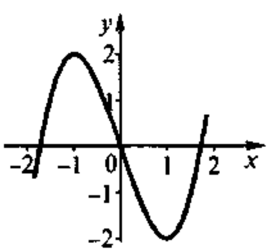

Рис. 95

Глава III

1. 1) $8-i$; 2) $4-4i$; 3) $71+3i$; 4) $\frac{1-i}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$. 3. 1) $z_{1,2}=\pm\sqrt{5}\,i$; 2) $z_{1,2}=5\pm 3i$.

Глава IV

1. 1) 5040; 2) 336; 3) 56; 4) $\frac{2}{7}$. 2. 1) $n(n+1)$; 2) $\frac{1}{(n-3)(n-2)}$. 3. 84. 4. 5040. 5. 720. 6. 720. 7. 1) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$; 2) $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$.

Глава V

1. $\frac{1}{4}$. 2. 0,95. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{15}{56}$. 5. 0,64. 6. $\frac{15}{19}$. 7. 0,09.

Глава VI

2. 4. 4. 2. 5. $x = 8 + 3t$, $y = -18 - 7t$, $t \in Z$.

Глава VII

1. Частное $2x^2 + 3x - 2$, остаток 0. 2. 12. 3. $4x - 3$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$. 5. $(x-1)(x+3)(x^2+3)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ